

A.D

R E P U B L I Q U E F R A N C A I S E

PCT/FR 99/01902



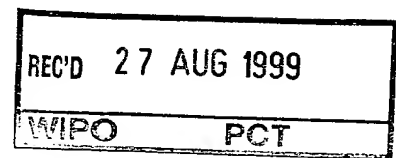
FR 99/1902

EU

# BREVET D'INVENTION

09/719498

CERTIFICAT D'UTILITÉ - CERTIFICAT D'ADDITION



COPIE OFFICIELLE

Le Directeur général de l'Institut national de la propriété industrielle certifie que le document ci-annexé est la copie certifiée conforme d'une demande de titre de propriété industrielle déposée à l'Institut.

Fait à Paris, le 12 AOUT 1999

Pour le Directeur général de l'Institut  
national de la propriété industrielle  
Le Chef du Département des brevets

**DOCUMENT DE  
PRIORITÉ**  
PRÉSENTÉ OU TRANSMIS  
CONFORMÉMENT À LA REGLE  
17.1.a) OU b)

Martine PLANCHE

INSTITUT  
NATIONAL DE  
LA PROPRIÉTÉ  
INDUSTRIELLE

SIEGE  
26 bis, rue de Saint Petersburg  
75800 PARIS Cédex 08  
Téléphone : 01 53 04 53 04  
Télécopie : 01 42 93 59 30

**This Page Blank (uspto)**

**REQUÊTE EN DÉLIVRANCE**

26 bis, rue de Saint Pétersbourg  
75800 Paris Cedex 08  
Téléphone : (1) 42.94.52.52 Télécopie : (1) 42.93.59.30

Confirmation d'un dépôt par télécopie ☐

Cet imprimé est à remplir à l'encre noire en lettres capitales

DATE DE REMISE DES PIÈCES <b>L. N. P. I. RENNES</b> N° D'ENREGISTREMENT NATIONAL <b>98 09958</b> DÉPARTEMENT DE DÉPÔT DATE DE DÉPÔT <b>30 JUL. 1998</b>	<b>1</b> NOM ET ADRESSE DU DEMANDEUR OU DU MANDATAIRE À QUI LA CORRESPONDANCE DOIT ÊTRE ADRESSÉE <b>Patrice VIDON</b> <b>Cabinet Patrice VIDON</b> <b>Immeuble Germanium</b> <b>80 avenue des Buttes de Coësmes</b> <b>35700 RENNES</b>
--	---

<b>2 DEMANDE</b> Nature du titre de propriété industrielle <input checked="" type="checkbox"/> brevet d'invention <input type="checkbox"/> demande divisionnaire <input type="checkbox"/> certificat d'utilité <input type="checkbox"/> transformation d'une demande de brevet européen <input type="checkbox"/> brevet d'invention <input type="checkbox"/> certificat d'utilité n° Établissement du rapport de recherche <input type="checkbox"/> différé <input checked="" type="checkbox"/> immédiat Le demandeur, personne physique, requiert le paiement échelonné de la redevance <input type="checkbox"/> oui <input type="checkbox"/> non	n° du pouvoir permanent références du correspondant <b>4822</b> téléphone <b>02.99.38.23.00</b> date
---	---

Titre de l'invention (200 caractères maximum)  
**Procédé de réalisation de filtres numériques de Nyquist à interférences nulles entre symboles, et dispositif de filtrage correspondant.**

<b>3 DEMANDEUR (S)</b> n° SIREN code APE-NAF Nom et prénoms (souligner le nom patronymique) ou dénomination <b>1. FRANCE TELECOM</b> <b>2. TELEDIFFUSION DE FRANCE</b> <b>Française</b> Nationalité (s)	Forme juridique <b>Société Anonyme</b> <b>Société Anonyme</b>
--	---



Adresse (s) complète (s) <b>1. 6, place d'Alleray 75015 PARIS</b> <b>2. 10, rue d'Oradour-sur-Glane Paris Cédex 15</b>	Pays <b>FRANCE</b> <b>FRANCE</b>
--	--

En cas d'insuffisance de place, poursuivre sur papier libre ☐

**4 INVENTEUR (S)** Les inventeurs sont les demandeurs ☐ oui ☒ non Si la réponse est non, fournir une désignation séparée

**5 RÉDUCTION DU TAUX DES REDEVANCES** ☐ requise pour la 1ère fois ☐ requise antérieurement au dépôt ; joindre copie de la décision d'admission

<b>6 DÉCLARATION DE PRIORITÉ OU REQUÊTE DU BÉNÉFICE DE LA DATE DE DÉPÔT D'UNE DEMANDE ANTÉRIEURE</b>			
pays d'origine	numéro	date de dépôt	nature de la demande

<b>7 DIVISIONS</b> antérieures à la présente demande n° date n° date	<b>8 SIGNATURE DU DEMANDEUR OU DU MANDATAIRE</b> (nom et qualité du signataire - n° d'inscription) <b>P. VIDON</b> <b>(CPI 92-1250)</b>	<b>SIGNATURE DU PRÉPOSÉ À LA RÉCEPTION</b> 	<b>SIGNATURE APRES ENREGISTREMENT DE LA DEMANDE À L'INPI</b> 
--	--	---	---



# BREVET D'INVENTION, CERTIFICAT D'UTILITE

## DÉSIGNATION DE L'INVENTEUR

(si le demandeur n'est pas l'inventeur ou l'unique inventeur)

DIVISION ADMINISTRATIVE DES BREVETS

26bis, rue de Saint-Petersbourg  
75800 Paris Cédex 08

Tél. : 01 53 04 53 04 - Télécopie : 01 42 93 59 30

N° D'ENREGISTREMENT NATIONAL

9809958

### TITRE DE L'INVENTION :

**Procédé de réalisation de filtres numériques de Nyquist à interférences nulles entre symboles, et dispositif de filtrage correspondant.**

LE(S) SOUSSIGNÉ(S)

**Patrice VIDON**  
**Cabinet Patrice VIDON**  
**Immeuble Germanium**  
**80 avenue des Buttes de Coësmes**  
**35700 RENNES**

DÉSIGNE(NT) EN TANT QU'INVENTEUR(S) (indiquer nom, prénoms, adresse et souligner le nom patronymique) :

**M. Pierre SIOHAN**  
**35, rue Maurice Haye**  
**35200 RENNES**

**M. Didier PINCHON**  
**Les Lazières**  
**31290 VIEILLEVIGNE**

NOTA : A titre exceptionnel, le nom de l'inventeur peut être suivi de celui de la société à laquelle il appartient (société d'appartenance) lorsque celle-ci est différente de la société déposante ou titulaire.

Date et signature (s) du (des) demandeur (s) ou du mandataire

  
le 30 juillet 1998  
P. VIDON (CPI 92-1250)

## DOCUMENT COMPORTANT DES MODIFICATIONS

PAGE(S) DE LA DESCRIPTION OU DES REVENDEICATIONS OU PLANCHE(S) DE DESSIN			R.M.*	DATE DE LA CORRESPONDANCE	TAMPON DATEUR DU CORRECTEUR
Modifiée(s)	Supprimée(s)	Ajoutée(s)			
		31, 32	RM	17/11/98	23 NOV. 1998 - A N R
15 - 28		29, 30, 33	RM	30/11/98	07 DEC. 1998 - A N R

Un changement apporté à la rédaction des revendications d'origine, sauf si celui-ci découle des dispositions de l'article R.612-36 du code de la Propriété Intellectuelle, est signalé par la mention «R.M.» (revendications modifiées).

**Procédé de réalisation de filtres numériques de Nyquist à interférences nulles entre symboles, et dispositif de filtrage correspondant.**

5 Le domaine de l'invention est celui du filtrage de signaux numériques, plus précisément l'invention concerne la réalisation de filtres de Nyquist, tels que ceux utilisés par exemple dans les systèmes de transmission en bandes de base et en monoporteuse.

10 Les filtres de Nyquist jouent un rôle essentiel dans les systèmes de transmission. Dans la plupart des cas, ce filtrage est réparti entre l'émission et la réception sous la forme de deux filtres dits en racine de Nyquist. A l'émission, le but est notamment de limiter la bande du signal émis. A la réception, le filtre doit éliminer les différents bruits pouvant altérer le signal utile, en particulier le bruit d'interférences dues à des canaux adjacents. Dans les systèmes modernes, ces filtres sont réalisés sous forme numérique. Il existe de nombreuses méthodes pour  
15 leur synthèse. Un élément clé de cette synthèse, outre bien sûr le respect des spécifications fréquentielles, est l'obtention d'une interférence entre symboles (IES) aussi réduite que possible.

Pour assurer les meilleures conditions possibles de transmission, on recherche, en général, des filtres à coefficients réels qui, idéalement, satisfont les  
20 critères suivants :

- interférence nulle entre symboles ;
- sélectivité fréquentielle ;
- filtres d'émission et de réception formant une paire adaptée ;
- linéarité de phase.

25 L'annexe 1 détaille ces différents aspects, et les contraintes correspondantes. Cette annexe, de même que les suivantes, fait bien sûr partie de la présente description à part entière.

Un système complet de transmission doit réaliser généralement également d'autres fonctions indispensables telles que :

- 30 - le filtrage analogique d'émission, qui a pour but de rejeter les

harmoniques en sortie du filtre numérique, ainsi que le filtrage analogique de réception, qui a pour fonction de limiter à la seule bande utile le spectre du signal à échantillonner ;

- les conversions numérique - analogique (CNA), à l'émission, et analogique - numérique (CAN) à la réception.

L'invention concerne essentiellement l'obtention de filtres numériques, et on ne détaille donc pas les fonctions concernant la partie analogique. Il convient cependant de noter que, en pratique, le filtrage analogique à mettre en oeuvre est nettement moins contraignant au sens de la raideur des filtres, que celui du numérique. Plus précisément, la complexité de réalisation du filtre de réjection d'émission est en relation directe avec la valeur du facteur de suréchantillonnage retenu.

Quant aux convertisseurs, le fait le plus notable du point de vue du filtrage, est celui de la conversion numérique - analogique qui introduit un filtrage en  $\sin(x)/x$ , qui peut être compensé classiquement par le filtrage analogique. Ce traitement peut également être réalisé en numérique.

Par ailleurs, pour des raisons de mise en oeuvre, les filtres sont généralement échantillonnés à fréquence double ou quadruple.

La figure 1 illustre la partie numérique d'un tel système de communication. Le signal à transmettre  $X(z)$  11 alimente l'émetteur 12, qui délivre un signal filtré  $Y(z)$  13 transmis via un canal de transmission 14 vers un récepteur 15 qui délivre le signal de sortie  $S(z)$  16. Le signal  $X(z)$  11 est tout d'abord soumis à un suréchantillonnage 121 puis à un filtrage 122  $F_1(z)$ . Dans le récepteur, le signal subit un filtrage de réception  $F_1(z)$  151, puis une décimation 152. Avec  $T$  le retard élémentaire lié au filtres numériques d'émission et de réception, on a  $T_s = MT$ , où  $T_s$  est la durée symbole et  $M$  le facteur de sur-échantillonnage.

L'intérêt d'avoir un facteur de sur-échantillonnage élevé est notamment de faciliter la réalisation du filtre analogique qui va suivre. Un inconvénient est que cela augmente d'autant la vitesse du convertisseur (CNA). En pratique, le compromis le plus raisonnable correspond à une valeur de  $M = 2$  ou  $4$ .

L'invention concerne spécifiquement le cas où le facteur de sur-échantillonnage est  $M = 4$ .

Des techniques de construction de filtres de Nyquist sont déjà connues. Toutefois, les différentes familles de filtres connues supposent toujours le relâchement d'une des propriétés souhaitées parmi l'interférence nulle entre symboles, la linéarité de phase et la paire de filtres adaptés.

Souvent, dans les systèmes de communication, on est conduit à accepter que le filtrage introduise une IES non nulle. Cela pose cependant parfois des problèmes, par exemple dans le cas de modulations à très grand nombre d'états (64, 256,...)

L'invention a notamment pour objectif de pallier ces inconvénients de l'état de l'art.

Plus précisément, un objectif de l'invention est de fournir un procédé de réalisation de filtres de Nyquist à interférences nulles entre symboles, et qui respecte également les conditions voulues de sélectivité fréquentielle et de linéarité de phase, dans une configuration en paire adaptée.

Un autre objectif de l'invention est de fournir un tel procédé qui permette une mise en oeuvre pratique aisée, des filtres obtenus, et qui prenne en compte certaines contraintes pratiques, telles que les effets de la quantification des coefficients. Plus précisément, l'invention a pour objectif de fournir un procédé garantissant le maintien de la propriété d'annulation de l'interférence entre symboles après cette quantification.

Un autre objectif est de fournir un tel procédé qui puisse être mis en oeuvre à l'aide d'une structure cascade, notamment sous la forme de treillis.

Ces objectifs, ainsi que d'autres qui apparaîtront par la suite, sont atteints selon l'invention à l'aide d'un procédé de réalisation d'un filtre numérique de Nyquist à interférences nulles entre symboles, destiné à traiter un signal physique transmis entre un émetteur et un récepteur via un canal de transmission. Ce filtre est un filtre symétrique  $P(z) = F^2(z)$  d'ordre  $N$  mettant en oeuvre un facteur de suréchantillonnage  $M=4$ , et formant une paire adaptée comprenant un filtre



d'émission et un filtre de réception, dont la décomposition polyphase de  $F(z)$  peut s'écrire :

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}F_2(z^4) + z^{-3}F_3(z^4).$$

Selon l'invention,  $N$  est choisi différent de  $4n$ ,  $n$  entier, et les coefficients de la décomposition polyphase de  $F(z)$  sont tels que :

$$\text{Si } N=4n+1, \quad F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \gamma z^{-n}$$

$$\text{Si } N=4n+2, \quad 2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \gamma z^{-n}$$

$$\text{Si } N=4n+3, \quad F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \gamma z^{-n}$$

$\hat{F}$  étant la symétrie miroir de  $F$  et  $\gamma$  étant une constante non nulle.

Ainsi, le procédé de l'invention garantit, par construction, que l'IES est parfaitement nulle.

De façon préférentielle,  $N$  vaut  $4n+3$  ou  $4n+1$  et :

ledit filtre d'émission effectue une interpolation par un facteur  $M=4$  et présente une implantation correspondant à une décomposition polyphase dite de type II, telle que :

$$F(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & z^{-2} & z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_0(z^4) \\ \hat{F}_1(z^4) \\ F_1(z^4) \\ F_0(z^4) \end{bmatrix}$$

et ledit filtre de réception effectue une décimation par un facteur  $M=4$  et présente une implantation correspondant à une décomposition polyphase dite de type I, telle que :

$$F(z) = \begin{bmatrix} F_0(z^4) & F_1(z^4) & \hat{F}_1(z^4) & \hat{F}_0(z^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \end{bmatrix}$$

Les filtres ainsi obtenus sont simples à réaliser et à mettre en oeuvre.

Avantageusement, dans ledit filtre d'émission, on effectue une étape de filtrage suivie d'une étape d'interpolation par un facteur  $M=4$ . De même, dans ledit  
5 filtre de réception, on effectue avantageusement une étape de décimation par un facteur  $M=4$  suivie d'une étape de filtrage.

Cette construction (structure permutée), permet de réduire d'un facteur 4 la cadence des opérations.

Selon un mode de réalisation préférentiel de l'invention, ledit filtre  
10 d'émission et/ou ledit filtre de réception présente une structure de réalisation sous forme d'au moins un treillis.

En effet, sous cette forme d'implantation, la contrainte de reconstruction parfaite est intégrée structurellement.

De façon avantageuse, ledit filtre d'émission et ledit filtre de réception sont  
15 constitués chacun d'une paire de composantes polyphases donnée respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = g A(\alpha_n) \Lambda(z) A(\alpha_{n-1}) \dots \Lambda(z) A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{F}_1 \\ \hat{F}_0 \end{bmatrix} = g A(\alpha_n) \Lambda(z) A(\alpha_{n-1}) \dots \Lambda(z) A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

où  $g$  est une constante non nulle de normalisation et  $\alpha_i$  des coefficients réels.

Selon un mode de réalisation particulier de l'invention, le procédé met en oeuvre une structure à deux treillis. Selon une autre approche, il peut mettre en oeuvre une structure à treillis unique, fonctionnant à une fréquence double.

5 L'invention concerne également, bien sûr, les dispositifs de filtrage obtenus à l'aide du procédé décrit ci-dessus. Il s'agit donc de dispositifs de filtrage d'un signal numérique de Nyquist à interférences nulles entre symboles, destiné à traiter un signal physique transmis entre un émetteur et un récepteur via un canal de transmission, basé sur un filtre symétrique  $P(z) = F^2(z)$  d'ordre  $N$  mettant en  
10 oeuvre un facteur de suréchantillonnage  $M=4$ , et formant une paire adaptée comprenant un filtre d'émission et un filtre de réception, et dont la décomposition polyphase de  $F(z)$  s'écrit :

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}F_2(z^4) + z^{-3}F_3(z^4).$$

Selon l'invention,  $N$  est différent de  $4n$ ,  $n$  entier, et :

15	Si $N=4n+1$ ,	$F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \gamma z^{-n}$
	Si $N=4n+2$ ,	$2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \gamma z^{-n}$
	Si $N=4n+3$ ,	$F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \gamma z^{-n}$

$\hat{F}$  étant la symétrie miroir de  $F$  et  $\gamma$  étant une constante non nulle.

20 D'autres caractéristiques et avantages de l'invention apparaîtront plus clairement à la lecture de la description suivant un mode de réalisation préférentiel donné à titre de simple exemple illustratif et non limitatif, et des dessins annexés parmi lesquels :

- la figure 1, déjà commentée en préambule, illustre de façon schématique la partie numérique d'un système de communication ;
- 25 - la figure 2, commentée dans l'annexe 1, représente une spécification fréquentielle typique d'un filtre de transmission ;
- la figure 3, commentée en annexe 2, représente de façon générale

un banc de filtres à 2 sous-bandes ;

- la figure 4 illustre un mode de réalisation de la partie d'analyse d'un banc de filtres para-unitaires à 2 sous-bandes de la figure 3, sous forme de treillis ;
- 5 - la figure 5 rappelle la structure d'un système de filtrage émission-réception, dans le cas linéaire et para-unitaire, commentée par la suite ;
- les figures 6a et 6b représentent deux formes d'implantation du filtre d'émission de la figure 5, utilisant une décomposition polyphase respectivement en structure directe et en structure permutée ;
- 10 - les figures 7a et 7b illustrent le filtre de réception de la figure 5, également dans le cadre de la décomposition polyphase, respectivement selon une structure directe et une structure permutée ;
- 15 - les figures 8a et 8b présentent le bloc treillis des filtres émission-réception des figures 6a, 6b, 7a et 7b, sous la forme respectivement d'un treillis direct et d'un treillis à sorties inversées ;
- 20 - la figure 9 illustre de façon détaillée un filtre racine de Nyquist d'émission à deux treillis, mettant en oeuvre les treillis inverses de la figure 8b ;
- la figure 10 présente un filtre de Nyquist de réception, mettant en oeuvre deux treillis directs selon la figure 8a ;
- 25 - la figure 11 rappelle les équations utilisées dans le cas du treillis inversé de la figure 9 ;
- la figure 12 présente un autre mode de réalisation du filtre d'émission, mettant en oeuvre un treillis unique et fonctionnant en cadence double ;
- 30 - la figure 13 présente un exemple de réponse en fréquences

optimisées d'un filtre racine de Nyquist d'ordre 43, selon l'invention ;

- la figure 14 illustre la réalisation d'un bloc Z, dans le cas d'un filtre d'ordre  $4n + 2$ , tel que discuté en annexe 3 ;
- 5 - la figure 15 présente le bloc d'implantation de la matrice  $P^T$ , également dans le cadre du mode de réalisation de l'annexe 3 ;
- la figure 16 présente le schéma complet d'implantation d'un bloc à 4 entrées et 4 sorties pour l'ordre  $4n + 2$ , discuté en annexe 3 ;
- la figure 17 présente un mode de réalisation d'un filtre demi Nyquist d'émission pour l'ordre  $4n + 2$  ;
- 10 - la figure 18 illustre un mode de réalisation demi-Nyquist de réception pour l'ordre  $4n + 2$ .

Comme déjà mentionné, le procédé de l'invention permet la réalisation de filtres avec  $M = 4$  vérifiant l'ensemble des critères suivants :

- 15 - IES nulle par construction ;
- filtres à phase linéaire ;
- filtres émission et réception formant une paire adaptée.

L'annexe 2 montre, après avoir développé l'analogie entre une paire de Nyquist avec  $M = 4$  et un banc de filtres orthogonaux à 2 sous-bandes, que deux situations peuvent se présenter, selon l'ordre du filtre. Plus précisément, on montre qu'il n'y a aucune solution pour les filtres d'ordre  $N = 4n$ , et que les cas  $N = 4n + 1$  et  $N = 4n + 3$  sont équivalents (théorème 2). La condition pour obtenir une interférence entre symboles nuls est précisé par le théorème 1.

20 Le cas des filtres d'ordre  $4n + 1$  ou  $4n + 3$  est décrit par la suite. Il s'avère être celui permettant d'obtenir la réalisation la plus simple. Le cas  $4n + 2$  est traité à l'annexe 3.

25 Dans ces deux cas, le schéma simplifié mis en oeuvre est représenté en figure 5. Par rapport au schéma initial général de la figure 1, on note que  $F_T(z)$  122 et  $F_R(z)$  151 sont remplacés par  $F(z)$ . Il s'agit en effet d'une paire adaptée à

phase linéaire.

Dans le cas  $N = 4n + 3$ , du fait des relations entre les différentes composantes polyphases  $F(z)$  l'expression (20) de l'annexe 2 peut se réécrire de la façon suivante :

5

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}F_2(z^4) + z^{-3}F_3(z^4) \quad (31)$$

10

On sait qu'au délai près les filtres émission et réception sont identiques. Cependant, si l'on veut tirer le meilleur parti des traitements multicadence, c'est-à-dire interpolation à l'émission, décimation à la réception, les schémas de réalisation ne seront pas exactement les mêmes.

À l'émission, où l'on réalise une interpolation par un facteur  $M = 4$ , les formes d'implantation représentées aux figures 6a et 6b, correspondent à celles, dites décomposition polyphase de type II [4] (les références citées sont regroupées dans l'annexe 4), donnée dans le cas de l'invention par :

15

$$F(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & z^{-2} & z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_0(z^4) \\ \hat{F}_1(z^4) \\ F_1(z^4) \\ F_0(z^4) \end{bmatrix} \quad (32)$$

20

Dans l'une des représentations (figure 6b) on notera la permutation des opérations expansion (61) - filtrage (62), qui permet de réaliser un traitement équivalent en travaillant à une cadence 4 fois moindre que dans le cas du schéma initial (figure 6a).

Dans la partie réception le filtrage est associé à une opération de décimation, pour laquelle une écriture plus appropriée de  $F(z)$  est celle de la décomposition polyphase dite de type I [4], qui dans le cas présent peut s'écrire :

$$F(z) = \begin{bmatrix} F_0(z^4) & F_1(z^4) & \hat{F}_1(z^4) & \hat{F}_0(z^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Deux variantes de l'implantation de cette dernière équation sont données à aux figures 7a et 7b (symétriquement aux figures 6a et 6b).

5 L'analogie entre le filtre  $F(z)$  d'ordre  $4n + 3$  et le banc de filtres d'ordre  $4n + 1$ , décrite par le théorème 3 (annexe 2), permet aussi de réécrire l'équation sous la forme :

$$\begin{bmatrix} F_0(z) & -\hat{F}_1(z) \\ F_1(z) & \hat{F}_0(z) \end{bmatrix} = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0) \quad (34)$$

Les deux paires de composantes polyphases, miroirs l'une de l'autre, se déduisent donc par les 2 équations qui suivent

$$10 \quad \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

et

$$\begin{bmatrix} -\hat{F}_1 \\ \hat{F}_0 \end{bmatrix} = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Dans chacun de ces cas, la structure treillis, représentée aux figures 8a et 8b, est la même.

15 Les deux variantes à sorties directes ou inversées de la figure 8 permettent ensuite de réaliser les filtres émission et réception suivant les schémas représentés respectivement aux figures 9 et 10.

En utilisant la décomposition polyphase du signal d'entrée, on peut ensuite

déterminer un schéma équivalent à un seul treillis mais qui, dans ce cas, est contraint de fonctionner à la fréquence double.

Dans le schéma proposé on présente le treillis inversé sachant que, bien entendu, le treillis direct conduit à un schéma de même type. La figure 11 rappelle les équations de base de ce treillis.

Le signal de sortie du filtre d'émission s'exprime par

$$Y(z) = [F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}\hat{F}_1(z^4) + z^{-3}\hat{F}_0(z^4)]X(z^4) \quad (37),$$

ce qui peut se réécrire :

$$\begin{aligned} Y(z) &= [F_0(z^4) + z^{-2}\hat{F}_1(z^4)]X(z^4) + z^{-1}[F_1(z^4) + z^{-2}\hat{F}_0(z^4)]X(z^4) \\ &= Y_0(z^2) + z^{-1}Y_1(z^2) \end{aligned} \quad (38)$$

Une division par 2 du facteur d'expansion ( $\uparrow 4 \equiv \uparrow 2 \uparrow 2$ ), puis une permutation de l'expansion par 2 avec le filtrage produit des sorties filtrées telles que :

$$\begin{aligned} Y_0(z) &= [F_0(z^2)X(z^2) + z^{-1}\hat{F}_1(z^2)X(z^2)] \\ Y_1(z) &= [F_1(z^2)X(z^2) + z^{-1}\hat{F}_0(z^2)X(z^2)] \end{aligned} \quad (39).$$

On reconnaît dans  $Y_1(z)$  la sortie supérieure du treillis inversé fonctionnant à cadence double, et, au signe du terme en facteur de  $z^{-1}$  près, dans  $Y_0(z)$  la sortie inférieure. Pour retrouver exactement la même expression, il suffit donc de multiplier cette sortie du treillis inverse par  $(-1)^n$ .

Une réalisation basée sur ce principe est représentée à la figure 12.

Pour la partie réception, la même technique s'applique, il en résulte un schéma de réalisation similaire à celui de la figure 12, mais dans lequel les épanseurs par 2 sont remplacés par des décimateurs par 2.

Dans le cas de la figure 9, on fonctionne à la fréquence la plus basse. Le coût de chaque filtre correspond à une structure treillis à  $n + 1$  cellules, plus celui



d'une inversion de signe. Pour obtenir un gain unitaire une multiplication par le facteur  $g$  est également à comptabiliser pour le schéma du filtre de réception.

Les calculs pour chaque cellule élémentaire correspondent aux 2

5 multiplieurs et additionneurs. Cependant, comme pour chaque treillis une des entrées est à zéro, un multiplieur et un additionneur peuvent donc être supprimés. le coût est donc de 1 multiplieur et 1 additionneur pour cette première cellule et du double pour les suivantes, c'est-à-dire  $(2n + 1)$  multiplieurs et  $(2n + 1)$  additionneurs. Pour chaque filtre nous aurons donc  $(4n + 2)$  multiplieurs et  $(4n + 2)$  additionneurs. À la fréquence la plus basse nous avons donc à réaliser  $(4n + 2)$

10 MPU et  $(4n + 2)$  APU, à cela s'ajoute une inversion de signe et une multiplication pour la partie réception.

La méthode de synthèse se déroule par exemple en trois étapes, illustrées ci-dessous par le calcul d'un filtre d'ordre 43.

- Etape 1 : A partir d'outils de synthèse [3], il est possible d'obtenir un

15 premier jeu de coefficients transversaux qui soit proche de l'IES nulle. Ce sont les coefficients initiaux du tableau 1 ;

- Etape 2 : Par identification, nous pouvons calculer les coefficients

20 treillis initiaux correspondants qui sont donnés au tableau 2. Le jeu initial de coefficients transversaux n'étant pas exactement à IES nulle, on obtient ainsi un nouveau jeu de coefficients transversaux, appelé reconstruit (cf. tableau 1) ;

- Etape 3 : Une optimisation locale des coefficients treillis initiaux

25 permet en suite d'améliorer un peu la réponse en fréquence du filtre. Les tableaux 1 et 2 donnent les valeurs de ces coefficients treillis et transverses après cette optimisation (tableaux 1 et 2).

$i$	Initial	Reconstruit	Optimisé
0	0.006302365568	0.006302365568	0.00374315552336009
1	-0.01335763186	-0.01335763186	-0.00764365688411938
2	-0.003586256877	0.000139948824594686	0.000256865997947587
3	0.003281590529	0.000296616382849522	0.00052452951560661
4	0.008254154585	0.00825445268157875	0.00210146572675043
5	0.008753151633	0.00875251982827294	0.00961384935212083
6	0.002954708412	-0.000818038274240153	-0.000565430770503378
7	-0.006948650815	-0.00231664836261536	-0.00210883853472157
8	-0.01474214438	-0.0147620230725521	-0.00994253905900314
9	-0.01369718742	-0.0136538137768085	-0.0139493173848354
10	-0.001682000235	0.00199238622180159	0.00140539009490696
11	0.01571460254	0.00939101589973353	0.00785652590927169
12	0.026870884	0.0269017853424573	0.0234276140713132
13	0.02112355083	0.0209715158594175	0.0216783222304717
14	-0.003340088297	-0.0032097877874163	-0.00339966101869637
15	-0.03511243314	-0.0308000965511264	-0.0274417538899884
16	-0.05300379917	-0.0530202725288858	-0.0511658629696837
17	-0.0364661812	-0.0360408764445379	-0.0377795925012697
18	0.0221698768	0.0140041435375816	0.0161657062857809
19	0.1105730906	0.116698398397514	0.109490464868349
20	0.1994492114	0.199658215352476	0.199471282748299
21	0.2550483644	0.253344105750997	0.257329314844394

Table 1: Coefficients transversaux des filtres symétriques de degré 43.

	Initiale	Optimisée
$g_0$	0.006302365568	0.003743155523
$\alpha_1$	2.1194631945539	2.04203561311232
$\alpha_2$	- 0.7583059650965	- 0.71854479175763
$\alpha_3$	0.6811397085317	0.73802350460893
$\alpha_4$	- 0.4637577935126	- 0.55360950120952
$\alpha_5$	0.4470434662649	0.51415010432349
$\alpha_6$	- 3.7431288142180	- 5.34790460147966
$\alpha_7$	- 1.5196264288798	- 1.52189568702330
$\alpha_8$	1.2422617481334	1.44910973460487
$\alpha_9$	- 0.5612421724760	- 0.63596605846521
$\alpha_{10}$	0.1588040486787	0.18869460160260
$\alpha_{11}$	- 0.0222057611677	- 0.06862284945003

Table 3: Coefficients des structures treillis.

La réponse en fréquence pour le filtre d'ordre 43 calculé de cette manière est reportée à la figure 13.

Il s'agit ici d'un premier résultat, qui peut encore être affiné. Par ailleurs, bien sûr, d'autres techniques de calcul peuvent être envisagées, pour différents ordres et contraintes techniques. On rappelle notamment que le cas  $N = 4n + 2$  est présenté en annexe 3.

La répartition du filtrage de Nyquist sur 2 filtres, de ce fait couramment appelés filtres en racine de Nyquist, ou en raccourci demi-Nyquist, doit tenir compte de contraintes liées à l'IES, aux spécifications fréquentielles, à la linéarité de la phase et à la propriété dite de paire adaptée. Dans ce paragraphe nous précisons ces différentes notions en supposant, pour simplifier la notation, que  $T = 1$ . Par ailleurs, dans le cadre de la réalisation proposée, nous ne traitons que du cas des filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF).

## 1 Interférence Entre Symboles (IES)

Soit  $x(n)$  le signal d'entrée et  $X(z)$  sa transformée en  $z$ , i.e.  $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$ , et convenons de noter suivant le même principe l'ensemble des signaux du système de transmission. La contrainte d'IES nulle revient à imposer que, en l'absence de bruit, le signal de sortie, noté  $S(z)$ , soit identique, à un retard près, à  $X(z)$ .

Soit  $Y(z)$  le signal en sortie de l'émetteur, il peut s'écrire

$$Y(z) = F_T(z)X(z^M). \quad (1)$$

En sortie du filtre de réception le signal, noté  $U(z)$ , a pour expression

$$U(z) = F_T(z)F_R(z)X(z^M). \quad (2)$$

Le signal de sortie est donc tout simplement

$$S(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} U(z^{\frac{1}{M}} w^k) = \left[ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_T(z^{\frac{1}{M}} w^k) F_R(z^{\frac{1}{M}} w^k) \right] X(z), \quad (3)$$

où  $w = e^{\frac{2j\pi}{M}}$  est une racine  $M$ ème de l'unité. La condition d'IES nulle peut alors se résumer à l'équation

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_T(z^{\frac{1}{M}} w^k) F_R(z^{\frac{1}{M}} w^k) = z^{-d}, \quad (4)$$

où  $d$  correspond au retard introduit par les 2 filtres.

Soit  $P(z)$  le filtre produit, i.e.  $P(z) = F_T(z)F_R(z)$ . Dans un formalisme habituel en traitement multicaudence du signal, l'équation (4) peut alors se réécrire

$$P(z) \downarrow_M = z^{-d}. \quad (5)$$

Un filtre  $P(z)$  qui vérifie cette relation est un filtre de Nyquist, ou encore un filtre  $M$ ème de bande.

Soient  $n_T$  et  $n_R$  les ordres respectifs des filtres RIF d'émission et de réception, le filtre  $P$  est donc d'ordre  $n_P = n_T + n_R$  et il peut se mettre sous la forme

$$P(z) = \sum_{n=0}^{n_P} p(n)z^{-n}. \quad (6)$$

Si l'équation (5) n'est pas vérifiée, on mesure habituellement la "distance" par rapport à cette propriété par l'une ou l'autre des expressions qui suivent

$$D_1 = \frac{1}{|p(d)|} \sum_{kM \neq d} |p(d - kM)|, \quad (7)$$

ou

$$D_2 = \frac{1}{p^2(d)} \sum_{kM \neq d} p^2(d - kM). \quad (8)$$

## 2 Les spécifications fréquentielles

La figure 2 représente une spécification fréquentielle typique pour les filtres en transmission numérique :

- Le facteur de retombée, en anglais le "roll-off", définit pour ce filtres passe-bas, la bande passante par  $[0, \omega_p = \frac{\pi}{M}(1 - \rho)]$  et la bande atténuée par  $[\omega_s = \frac{\pi}{M}(1 + \rho), \pi]$ .
- Les spécifications d'ondulation en bande passante, notée  $\delta_1$ , et en bande atténuée, notée  $\delta_2$ , sont en général les mêmes pour les filtres d'émission et de réception.
- À la pulsation  $\pi/M$ , on impose en général la contrainte  $F_R(\pi/M) = F_T(\pi/M) = \sqrt{2}/2$ .

## 3 La linéarité de phase

Le choix de filtres à caractéristique phase-fréquence parfaitement linéaire est en général recommandé pour les systèmes de transmission numérique [1, p 325]. Cela a en particulier l'avantage de préserver les instants de passage par zéros des trains binaires transmis.

## 4 La paire de filtres adaptée

Dans le cas de modulations linéaires, si on suppose que l'IES est nulle pour l'ensemble du système de transmission, et que le bruit du canal est additif, blanc et gaussien (WAGN), on sait que la paire adaptée, i.e.  $F_T(z) = z^{-N} F_R(z^{-1})$ , avec  $N = n_T = n_R$  l'ordre de chaque filtre, est optimale pour le critère signal à bruit (SNR) [2, pp. 51 sq.]. Le SNR qui vaut  $\frac{E}{N_0} \frac{1}{\|F_R\|^2 \|F_T\|^2}$  [3] atteint alors son maximum avec  $\|F_R\|^2 \|F_T\|^2 = 1$ .

## 1 Bancs de filtres orthogonaux à 2 sous-bandes

Un banc de filtres à 2 sous-bandes peut se représenter suivant le schéma de la figure 3. De manière à satisfaire la condition de non repliement les filtres de synthèse  $G_0(z)$  et  $G_1(z)$  se déduisent directement des filtres d'analyse par  $G_0(z) = H_1(-z)$  et  $G_1(z) = -H_0(-z)$ .

On peut montrer ensuite [4] que la condition de reconstruction parfaite (PR) peut s'exprimer à partir de la seule matrice polyphase  $H_{[H_0, H_1]}(z)$  du banc d'analyse

$$H_{[H_0, H_1]}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) \\ H_{1,0}(z) & H_{1,1}(z) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

où les  $H_{k,l}(z)$  sont les composantes polyphases pour chaque filtre  $H_k(z)$ , i.e.

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^1 z^{-l} H_{k,l}(z^2) \quad (10)$$

Dans le cas des bancs orthogonaux à 2 sous-bandes les filtres sont d'ordre impair  $2n + 1$  et les composantes polyphases sont toutes de même degré  $n$ . Le banc est alors PR si le déterminant de la matrice polyphase est un monôme, autrement dit si

$$\text{Det } H_{[H_0, H_1]}(z) = H_{0,0}(z)H_{1,1}(z) - H_{1,0}(z)H_{0,1}(z) = \beta z^{-n}, \quad (11)$$

avec  $\beta$  une constante non nulle.

Soit  $\hat{Q}(z)$  le filtre miroir du filtre  $Q(z)$  d'ordre  $m$ , i.e.  $\hat{Q}(z) = z^{-m}Q(z^{-1})$ . Le banc orthogonal se caractérise par des filtres  $H_0(z)$  et  $H_1(z)$  dits conjugués en quadrature, ce qui peut s'écrire  $H_1(z) = \pm z^{-(2n+1)}H_0(z^{-1})$ . Dans ce qui suit contrairement à la présentation faite en [4], nous choisissons l'écriture avec un signe plus. Dans ces conditions les composantes polyphases satisfont la relation

$$H_{0,1}(z) = -\hat{H}_{1,0}(z), \quad H_{1,1}(z) = \hat{H}_{0,0}(z). \quad (12)$$

Par conséquent la matrice polyphase peut s'exprimer par

$$H_{[H_0, H_1]}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & -\hat{H}_{1,0}(z) \\ H_{1,0}(z) & \hat{H}_{0,0}(z) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

et la relation (11) peut se réécrire sous la forme

$$\text{Det } H_{[H_0, H_1]}(z) = H_{0,0}(z)\hat{H}_{0,0}(z) + H_{1,0}(z)\hat{H}_{1,0}(z) = \beta z^{-n}, \quad (14)$$

Le signal de sortie est alors tel que  $\hat{X}(z) = \gamma z^{-(2n+1)}X(z)$ , avec  $\gamma$  une constante non nulle. La matrice  $H_{[H_0, H_1]}(z)$  est paraunitaire et peut se mettre sous forme cascade avec [4]

$$H_{[H_0, H_1]}(z) = g A(\alpha_n) \Lambda(z) A(\alpha_{n-1}) \dots \Lambda(z) A(\alpha_0), \quad (15)$$

où  $g$  est une constante de normalisation non nulle,  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  sont  $n+1$  nombres réels et où les matrices  $A(\alpha)$  pour  $\alpha$  réel et  $\Lambda(z)$  sont définies par

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Une réalisation d'un banc de synthèse basé sur cette écriture mathématique produit la représentation treillis de la figure 4.

## 2 Caractéristiques générales du cas de la paire adaptée à phase linéaire pour $M = 4$

Pour la paire adaptée à phase linéaire nous avons forcément  $F_T(z)$  et  $F_R(z)$  symétriques tels que  $F_T(z) = F_R(z)$ , que l'on peut noter avec la seule expression  $F(z)$ . Soit  $N$  l'ordre de  $F(z)$ , nous avons donc

$$F(z) = \sum_{k=0}^N f_k z^{-k} \quad (17)$$

Le filtre produit  $P(z)$  s'exprime alors par

$$P(z) = F^2(z) = \sum_{k=0}^{2N} p(k) z^{-k} \quad (18)$$

avec, bien sûr,  $p(k) = p(2N - k)$ .  $P(z)$  satisfait la condition d'IES nulle (5) si

$$p(k) = 0 \text{ pour } k - N = 4l, \quad l \neq 0, \quad (19)$$

On peut faire un premier constat en ce qui concerne les filtres d'ordre  $N = 4n$ .

**Proposition 1.** — Soit  $F(z)$  un filtre symétrique d'ordre  $4n$ .  $F(z)$  ne peut être à IES nulle.

Pour que  $F(z)$ , filtre symétrique, soit à IES nulle il faut que  $f_0 \neq 0$ . Le monôme de plus haut degré de  $P(z)$  est  $f_0^2 z^{-8n}$  alors que son terme central est de degré  $4n$  en  $z^{-1}$ . Comme la différence des degrés est un multiple de 4,  $F(z)$  n'est pas à IES nulle.

La décomposition polyphase de  $F(z)$  pour  $M = 4$  s'écrit sous la forme

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1} F_1(z^4) + z^{-2} F_2(z^4) + z^{-3} F_3(z^4). \quad (20)$$

avec

$$F_l(z) = \sum_{n=0}^{n_l} f_{4n+l} z^{-n} \quad (21)$$

Pour réaliser l'analyse des différents cas possibles en fonction de l'ordre  $N$ , on utilise la propriété de symétrie de  $F(z)$  et le fait que  $4n_l + l \leq N$ .

- Si  $N = 4n$ , le degré de  $F_0(z)$  est égal à  $n$  et celui des  $F_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$  est strictement inférieur à  $n$ . D'après la proposition 1 on sait que ce cas ne présente pas d'intérêt pour notre problème.
- Si  $N = 4n + 1$ ,  $F_1(z)$  est de degré  $n$ ,  $F_0(z)$  de degré  $\leq n$  tandis que  $F_2(z)$  et  $F_3(z)$  sont de degré  $\leq n - 1$ .  $F_1(z)$  correspond alors par symétrie miroir à  $F_0(z)$ .  $F_1(z)$  est donc en fait de degré  $n$ . On a donc

$$F_0(z) = \hat{F}_1(z) \text{ et } F_3(z) = \hat{F}_2(z) \quad (22)$$

- Si  $N = 4n + 2$ , il vient  $n_2 = n$ ,  $n_1 = n$  et  $n_3 = n - 1$ .  $F_2(z)$  est le symétrique de  $F_0(z)$ , on a donc

$$F_2(z) = \hat{F}_0(z) , \quad F_1(z) = \hat{F}_1(z) , \quad F_3(z) = \hat{F}_3(z) \quad (23)$$

- Si  $N = 4n + 3$ ,  $4n_l + l \leq 4n + 3$ ,  $\forall l$  ( $0 \leq l \leq 3$ ), et les filtres  $F_i$  sont tous de degré  $\leq n$ . En effet, le terme de plus haut degré de  $F_0(z)$  est de degré  $4n + 3$  donnant un terme de degré  $n$  à  $F_3(z)$ . Le terme de plus haut degré de  $F_3(z)$  correspond par symétrie au terme constant de  $F_0(z)$ . On a donc

$$F_3(z) = \hat{F}_0(z) \text{ et } F_2(z) = \hat{F}_1(z) \quad (24)$$

**Remarque.**— Dans l'équation (22) on a écrit à dessein  $F_0(z) = \hat{F}_1(z)$  et non  $F_1(z) = \hat{F}_0(z)$  car on est sûr que le degré de  $F_1(z)$  est  $n$  puisque le terme constant de  $F_0(z)$  est non nul, mais pas que le degré de  $F_0(z)$  est  $n$ . D'ailleurs ce cas, où  $f_1 = f_{N-1} = 0$ , est considéré plus bas.

On développe alors le produit  $F^2(z)$  en tenant compte de la décomposition (20) et l'on obtient la caractérisation suivante des filtres  $F(z)$  vérifiant la propriété d'IES nulle.

**Théorème 1.**— Soit  $F(z)$  un filtre symétrique d'ordre  $N$  vérifiant  $F(z = 0) \neq 0$ . Alors suivant les valeurs de  $N$ ,  $F(z)$  est à IES nulle si et seulement si :

- Si  $N = 4n + 1$ ,

$$F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \alpha z^{-n} , \quad (25)$$

- Si  $N = 4n + 2$ ,

$$2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \alpha z^{-n} , \quad (26)$$

- Si  $N = 4n + 3$ ,

$$F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \alpha z^{-n} , \quad (27)$$



où  $\alpha$  est une constante non nulle.

Le théorème suivant montre que toutes les solutions d'ordre  $N = 4(n-1) + 3$  s'obtiennent à partir des solutions d'ordre  $N = 4n + 1$ .

**Théorème 2.**— Soit  $F(z)$  un filtre symétrique à IES nulle d'ordre  $4n + 1, n \geq 1$ , alors si  $F_i(z), i = 0, \dots, 3$  désigne ses composantes polyphases,  $F_0(z)$  est de degré strictement inférieur à  $n$  et  $F_1(z)$  peut s'écrire sous la forme  $F_1(z) = z^{-1}K_1(z)$ . On a alors  $\hat{K}_1(z) = F_0(z)$  et le filtre  $\hat{F}(z)$  de composantes polyphases  $[F_0(z), F_2(z), F_3(z), K_1(z)]$  est symétrique d'ordre  $4(n-1) + 3$  et à IES nulle.

**Démonstration.**— Cela résulte immédiatement de la relation (25) puisque le terme constant du membre de gauche est nul. On a donc  $F_1(z=0)\hat{F}_1(z=0) = f_0f_1 = 0$ . Comme  $F_1(z)$  contribue avec  $f_0$  au terme de plus haut degré,  $f_0 \neq 0$  et donc  $f_1 = 0$ . En écrivant  $F_1(z)$  sous la forme  $F_1(z) = z^{-1}K_1(z)$  et sachant que  $\hat{F}_1(z) = \hat{K}_1(z)$ , la relation (26), peut encore s'écrire

$$z^{-1}K_1(z)\hat{K}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \alpha z^{-n}, \quad (28)$$

Comme  $\hat{K}_1(z) = F_0(z)$  et donc  $K_1(z) = \hat{F}_0(z)$  on obtient la relation (27), pour un filtre où  $K_1(z)$  se substitue à  $F_3(z)$  et a donc pour composantes polyphases :  $[F_0(z), F_2(z), F_3(z), K_1(z)]$ . On peut vérifier sur un exemple le passage d'un filtre d'ordre 9 à un filtre d'ordre 7.

*Exemple*

$$\begin{aligned} F_0(z) &= f_0 + f_4z^{-1} + f_1z^{-2} = f_0 + f_4z^{-1} \\ F_1(z) &= f_1 + f_4z^{-1} + f_0z^{-2} = z^{-1}(f_4 + f_0z^{-1}) = z^{-1}G_1(z) \\ F_2(z) &= f_2 + f_3z^{-1} \\ F_3(z) &= f_3 + f_2z^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

Le filtre composé de  $[F_0(z), F_2(z), F_3(z), K_1(z)]$  est d'ordre 7 et s'exprime alors par

$$F_0(z) = f_0 + f_2z^{-1} + f_3z^{-2} + f_4z^{-3} + f_4z^{-4} + f_3z^{-5} + f_2z^{-6} + f_0z^{-7} \quad (30)$$

Un troisième théorème montre que les solutions d'ordre  $N = 4n + 3$  s'obtiennent à partir des bancs de filtres orthogonaux à 2 sous-bandes (cf. paragraphe 3.1).

**Théorème 3.**— Soit  $[H_0(z), H_1(z)]$  un banc de filtres orthogonaux à deux sous bandes et d'ordre  $2n + 1$  dont la matrice polyphase est donnée par (13), alors le filtre  $\hat{H}(z)$  dont les quatre composantes polyphases sont  $[H_{0,0}(z), H_{1,0}(z), \hat{H}_{1,0}(z), \hat{H}_{0,0}(z)]$  est un filtre à phase linéaire, d'ordre  $4n + 3$  et à IES nulle. De façon réciproque, tous les filtres de ce type s'obtiennent à partir des bancs de filtres orthogonaux à deux sous-bandes.

**Démonstration.**— La démonstration est immédiate puisque les filtres à phase linéaire, d'ordre  $4n + 3$  et à IES nulle sont caractérisés par la relation (27) qui, dans les conditions du théorème devient équivalente à (14).

## Paire adaptée à phase linéaire d'ordre $N = 4n + 2$

### Factorisation initiale

Le théorème de la section 3.2 nous donne, entre autres, la condition que doit réaliser un filtre  $F(z)$  d'ordre  $4n + 2$  pour être à IES nulle. On rappelle qu'elle s'écrit

$$2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \alpha z^{-n}, \quad (40)$$

où  $\alpha$  est une constante non nulle et où les composantes  $F_i(z)$  sont toutes de degré  $n$ , hormis  $F_3(z)$ , et satisfont les relations  $\hat{F}_2(z) = F_0(z)$ ,  $F_1(z) = \hat{F}_1(z)$  et  $F_3(z) = \hat{F}_3(z)$ .

La décomposition proposée initialement s'appuie sur une notation dont voici les définitions

**Théorème 4.**— Soient  $a_i, i = 1, \dots, n+1, n \geq 0, n+1$  constantes. On considère le vecteur colonne  $[F_0(z), F_1(z), F_2(z), F_3(z)]^T$  défini par l'égalité

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = M(a_1) Z M(a_2) Z \dots Z M(a_n) Z \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

Alors le filtre  $F(z)$ , dont les composantes polyphases sont les  $F_i(z), i = 1, \dots, 4$ , est à phase linéaire, monique, d'ordre  $4n + 2$  et à IES nulle.

Réciproquement, tout filtre monique d'ordre  $4n + 2$ , à phase linéaire et à IES nulle admet une décomposition de cette forme.

**Démonstration.**— Pour  $n = 0$ , les composantes polyphases sont les polynômes constants  $F_0(z) = 1, F_1(z) = a_1, F_2(z) = 1$  et  $F_3(z) = 0$ . Ces polynômes vérifient trivialement la condition (40) ainsi que les conditions de symétrie et de degré. On a alors  $F(z) = 1 + a_1 z^{-1} + z^{-2}$ . Supposons maintenant que les composantes d'un filtre  $F(z)$  d'ordre  $4n + 2, F_i(z), i = 0, \dots, 3$ , vérifient la condition (40) ainsi que les conditions de symétrie et de degré. Construisons  $L_i(z), i = 0, \dots, 3$  par

$$\begin{bmatrix} L_0(z) \\ L_1(z) \\ L_2(z) \\ L_3(z) \end{bmatrix} = M(a_1) Z \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

On a

$$L_0(z) = F_0(z) - \frac{a_1^2}{2} z^{-1} F_2(z) + a_1 z^{-1} F_3(z), \quad (47)$$

$$L_1(z) = -a_1 F_0(z) - a_1 z^{-1} F_2(z) + (1 - \frac{a_1^2}{2}) z^{-1} F_3(z), \quad (48)$$

$$L_2(z) = -\frac{a_1^2}{2} F_0(z) + z^{-1} F_2(z) + a_1 z^{-1} F_3(z), \quad (49)$$

$$L_3(z) = (1 + \frac{a_1^2}{2}) F_1(z). \quad (50)$$

Il est à peu près immédiat de vérifier les conditions de degré et de symétrie sur les composantes  $L_i(z), i = 0, \dots, 3$ . En développant l'expression analogue de (40) pour les composantes  $L_i(z), i = 0, \dots, 3$ , on obtient

$$2L_0(z)\hat{L}_0(z) + L_1^2(z) + z^{-1}L_3^2(z) = \frac{(2 + a_1^2)^2}{4} z^{-1} (2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z)) \quad (51)$$

D'après (40), la partie exacte du théorème est donc démontrée.

La réciproque est démontrée si l'on peut établir que les relations (47-50) permettent de déterminer de manière unique un coefficient  $a_1$  et les composantes  $F_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  d'un filtre  $F(z)$  monique, à phase linéaire et à IES nulle. Comme on doit avoir  $F_0(z=0) = 1$  (puisque  $F(z)$  est monique et symétrique, son terme constant est égal à 1), d'après (48) on a  $a_1 = -L_1(z=0)$ . Si  $a_1 = 0$ , alors nous sommes dans le cas particulier où  $L_0(z)$  est de degré  $n$ , le terme de degré  $n+1$  étant nul, le polynôme symétrique  $L_1(z)$  a un terme constant nul et son terme de plus haut degré est nul, et enfin le terme constant de  $L_2(z)$  est nul (mais pas son terme de degré  $n+1$  dont le coefficient est 1). On inverse alors les relations (47-50) par  $F_0(z) = L_0(z)$ ,  $F_1(z) = L_3(z)$ ,  $F_2(z) = L_2(z)$  quo  $z^{-1}$  et  $F_3(z) = L_1(z)$  quo  $z^{-1}$ . On suppose donc maintenant que  $a_1 \neq 0$ , mais ce n'est pas nécessaire en fait. L'inversion formelle des formules (47-50) conduit à

$$F_0(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2} \left( L_0(z) - a_1 L_1(z) - \frac{a_1^2}{2} L_2(z) \right), \quad (52)$$

$$F_1(z) = \frac{2}{2+a_1^2} L_3(z), \quad (53)$$

$$F_2(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2} \left( -\frac{a_1^2}{2} L_0(z) - a_1 L_1(z) + L_2(z) \right) \text{ quo } z^{-1}, \quad (54)$$

$$F_3(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2} \left( a_1 L_0(z) + \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right) L_1(z) + a_1 L_2(z) \right) \text{ quo } z^{-1}. \quad (55)$$

Il suffit alors de montrer que les quotients par  $z^{-1}$  sont exacts. Comme  $F(z)$  est monique,  $L_0(z=0) = 1$ ,  $L_1(z=0) = -a_1$  par définition de  $a_1$  et, d'après la relation (40),  $L_2(z=0) = -a_1^2/2$ . Les membres de droites des égalités définissant  $F_2(z)$  et  $F_3(z)$  s'annulent donc en  $z=0$  et les quotients sont exacts. On peut alors vérifier que les polynômes  $F_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$  satisfont les conditions de symétrie adéquates.

## Décomposition équivalente

En notant par  $R(\alpha)$  la matrice

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

et en utilisant la formule (45), on obtient

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = P^T R(a_1) P Z P^T R(a_2) P Z P^T \dots P Z P^T R(a_n) P Z \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

On introduit alors la matrice  $\tilde{Z}$  définie par

$$\tilde{Z} = P Z P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+z^{-1}) & 0 & \frac{1}{2}(-1+z^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ \frac{1}{2}(-1+z^{-1}) & 0 & \frac{1}{2}(1+z^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

et compte tenu de

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

on obtient, avec un facteur multiplicatif  $g$ , la décomposition

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = g P^T R(a_1) \bar{Z} R(a_2) \bar{Z} \dots R(a_n) \bar{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

### Complexité opératoire

L'équation (60) donne directement la structure de réalisation des filtres demi-Nyquist d'émission et de réception. Elle correspond à un système à 4 entrées et 4 sorties qui dans les schémas des figures 6 et 7 se substitue à l'ensemble des 4 filtres polyphases. On notera que dans le cas du filtre d'émission les sorties sont à inverser par rapport à l'écriture (60) qui correspond, par contre, exactement, à celle du filtre de réception. Hormis cette différence de détail, les structures pour chacun de ces filtres d'ordre  $4n + 2$  vont donc correspondre à

- $n$  blocs matriciels de type  $\bar{Z}$  et  $R(a_l)$ .
- un bloc matriciel  $P^T$ .
- un bloc vectoriel  $[1, a_{n+1}, 0, 0]^T$ .
- un multiplieur  $g$ , à ne comptabiliser que pour l'émission ou la réception.

Examinons à présent plus en détail le coût de réalisation de chacun de ces éléments.

- Matrices  $R(a_l)$ .

Les matrices  $R(a_l)$ ,  $1 \leq l \leq n$ , sont des matrices blocs qui peuvent se mettre sous la forme

$$R(a_l) = \begin{pmatrix} G_l & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (61)$$

où  $I$  est la matrice unité et  $G_l$  la matrice de rotation pour l'angle  $a_l$ , i.e.

$$G_l = \begin{pmatrix} \cos(a_l) & -\sin(a_l) \\ \sin(a_l) & \cos(a_l) \end{pmatrix} \quad (62)$$

Le coût d'implantation est donc tout simplement celui du treillis correspondant à la rotation  $G_l$ , c'est-à-dire 4 multiplications et 2 additions.

- La matrice  $\bar{Z}$ .

Elle permet d'associer à un vecteur  $e$  d'entrée, le vecteur  $s$  de sortie par la relation  $s = \bar{Z}e$ , ce qui se traduit par les 4 équations qui suivent :

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{2}[(e_0 - e_2) + z^{-1}(e_0 + e_2)] \\ s_1 &= z^{-1}e_1 \\ s_2 &= \frac{1}{2}[(e_2 - e_0) + z^{-1}(e_0 + e_2)] \\ s_3 &= e_3 \end{aligned} \quad (63)$$

Le schéma de réalisation d'un bloc de ce type est représenté à la figure 15. On peut préciser que les multiplications par  $1/2$  peuvent se réduire à un simple décalage des données binaires. En plus de ces 2 décalages le coût est donc simplement de 4 additions et d'une inversion de signe.

- La matrice  $P^T$ .

Elle se présente sous la forme :

$$P^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

avec  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Sa réalisation peut également se déduire des équations d'entrée-sortie, qui dans le cas présent s'écrivent :

$$\begin{aligned} s_0 &= a(e_0 + e_2) \\ s_1 &= e_1 \\ s_2 &= a(-e_0 + e_2) \\ s_3 &= e_3 \end{aligned} \quad (65)$$

de manière immédiate on peut donc déduire ensuite le schéma de la figure 16

Le coût opératoire est de 2 multiplications, 2 additions et une inversion de signe.

- Le bloc vectoriel  $[1, a_{n+1}, 0, 0]^T$ .

Son coût d'implantation est d'une seule multiplication.

Le schéma complet d'implantation, conforme à l'équation (60), correspond donc à un système à 4 entrées et 4 sorties, tel qu'on le représente à la figure 17. On retrouve naturellement ce système à l'émission et à la réception. L'ordre de complexité de chacun de ces filtres est donc de  $4n$  MPU et  $6n$  APU.

Ainsi que nous l'avons déjà précisé, à l'émission il est nécessaire d'inverser les sorties. Dans le schéma de réalisation reporté à la figure 18, cette opération est symbolisée par le bloc J, correspondant à la matrice antidiagonale, i.e.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Le schéma de réception pour l'ordre  $4n + 2$  est représenté à la figure 19.

## References

- [1] J. G. Proakis. *"Digital Communications"*. McGraw-Hill, 1983.
- [2] R. W. Lucky, J. Salz, and E. J. Weldon, Jr. *"Principles of Data Communications"*. McGraw-Hill, New-York, 1968.
- [3] P. Siohan and F. Moreau de Saint-Martin. "On the design of linear-phase transmitter and receiver filters for digital transmission systems". *Submitted to IEEE Transactions on Circuits and Systems*, September 1996.
- [4] P. P. Vaidyanathan. *Multirate systems and filter banks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-York, New-Jersey, 1993.
- [5] P. R. Chevillat and G. Ungerboeck. "Optimum FIR transmitter and receiver filters for data transmission over band-limited channels". *IEEE Transactions on Communications*, COM-30(8):1909-1915, August 1982.

## REVENDECATIONS

1. Procédé de réalisation d'un filtre numérique de Nyquist à interférences nulles entre symboles, destiné à traiter un signal physique transmis entre un émetteur et un récepteur via un canal de transmission,

ledit filtre étant un filtre symétrique  $P(z) = F^2(z)$  d'ordre  $N$  mettant en oeuvre un facteur de suréchantillonnage  $M=4$ , et formant une paire adaptée comprenant un filtre d'émission et un filtre de réception,

la décomposition polyphase de  $F(z)$  s'écrivant :

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}F_2(z^4) + z^{-3}F_3(z^4)$$

caractérisé en ce que  $N$  est différent de  $4n$ ,  $n$  entier,

et en ce que :

$$\text{Si } N=4n+1, \quad F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \alpha z^{-n}$$

$$\text{Si } N=4n+2, \quad 2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \alpha z^{-n}$$

$$\text{Si } N=4n+3, \quad F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \gamma z^{-n}$$

$\hat{F}$  étant la symétrie miroir de  $F$  et  $\gamma$  étant une constante non nulle.

2. Procédé selon la revendication 1, caractérisé en ce que  $N$  vaut  $4n+3$  ou  $4n+1$  et en ce que :

ledit un filtre d'émission effectue une interpolation par un facteur  $M=4$  et présente une implantation correspondant à une décomposition polyphase dite de type II, telle que :

$$F(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & z^{-2} & z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_0(z^4) \\ \hat{F}_1(z^4) \\ F_1(z^4) \\ F_0(z^4) \end{bmatrix}$$

- et ledit filtre de réception effectue une décimation par un facteur  $M=4$  et présente une implantation correspondant à une décomposition polyphase dite de type I, telle que :

$$F(z) = \begin{bmatrix} F_0(z^4) & F_1(z^4) & \hat{F}_1(z^4) & \hat{F}_0(z^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \end{bmatrix}$$

- 5      3.      Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 et 2, caractérisé en ce que, dans ledit filtre d'émission, on effectue une étape de filtrage suivie d'une étape d'interpolation par un facteur  $M=4$ .
4.      Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 3, caractérisé en ce que, dans ledit filtre de réception, on effectue une étape de décimation par un
- 10      facteur  $M=4$  suivie d'une étape de filtrage.
5.      Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 4, caractérisé en ce que ledit filtre d'émission et/ou ledit filtre de réception présente une structure de réalisation sous forme d'au moins un treillis.
6.      Procédé selon la revendication 5, caractérisé en ce que ledit filtre
- 15      d'émission et ledit filtre de réception sont constitué chacun d'une paire de composantes polyphases donnée respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{F}_1 \\ \hat{F}_0 \end{bmatrix} = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$



où  $g$  est une constante non nulle de normalisation et  $\alpha_i$  des coefficients réels.

7. Procédé selon la revendication 6, caractérisé en ce qu'il met en oeuvre une structure à deux treillis.

8. Procédé selon la revendication 6, caractérisé en ce qu'il met en oeuvre une structure à treillis unique, fonctionnant à une fréquence double.

9. Dispositif de filtrage d'un signal numérique de Nyquist à interférences nulles entre symboles, destiné à traiter un signal physique transmis entre un émetteur et un récepteur via un canal de transmission, basé sur un filtre symétrique  $P(z) = F^2(z)$  d'ordre  $N$  mettant en oeuvre un facteur de suréchantillonnage  $M=4$ , et formant une paire adaptée comprenant un filtre d'émission et un filtre de réception, la décomposition polyphase de  $F(z)$  s'écrivant :

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}F_2(z^4) + z^{-3}F_3(z^4)$$

caractérisé en ce que  $N$  est différent de  $4n$ ,  $n$  entier,

et en ce que :

$$\begin{aligned} \text{Si } N=4n+1, & \quad F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \alpha z^{-n} \\ \text{Si } N=4n+2, & \quad 2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \alpha z^{-n} \\ \text{Si } N=4n+3, & \quad F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \alpha z^{-n} \end{aligned}$$

$\hat{F}$  étant la symétrie miroir de  $F$  et  $\gamma$  étant une constante non nulle.

## REVENDEICATIONS

1. Procédé de réalisation d'un filtre numérique de Nyquist à interférences nulles entre symboles, destiné à traiter un signal physique transmis entre un émetteur et un récepteur via un canal de transmission,

5 ledit filtre étant un filtre symétrique  $P(z) = F^2(z)$  d'ordre  $N$  mettant en oeuvre un facteur de suréchantillonnage  $M=4$ , et formant une paire adaptée comprenant un filtre d'émission (12) et un filtre de réception (15),

la décomposition polyphase de  $F(z)$  s'écrivant :

$$10 \quad F(z) = F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}F_2(z^4) + z^{-3}F_3(z^4)$$

caractérisé en ce que  $N$  est différent de  $4n$ ,  $n$  entier,

et en ce que :

15	Si $N=4n+1$ ,	$F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \gamma z^{-n}$
	Si $N=4n+2$ ,	$2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \gamma z^{-n}$
	Si $N=4n+3$ ,	$F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \gamma z^{-n}$

$\hat{F}$  étant la symétrie miroir de  $F$  et  $\gamma$  étant une constante non nulle.

2. Procédé selon la revendication 1, caractérisé en ce que  $N$  vaut  $4n+3$  ou  $4n+1$  et en ce que :

20 - ledit un filtre d'émission (12) effectue une interpolation (121) par un facteur  $M=4$  et présente une implantation correspondant à une décomposition polyphase dite de type II, telle que :

$$F(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & z^{-2} & z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_0(z^4) \\ \hat{F}_1(z^4) \\ F_1(z^4) \\ F_0(z^4) \end{bmatrix}$$

et ledit filtre de réception (15) effectue une décimation (152) par un facteur  $M=4$  et présente une implantation correspondant à une décomposition polyphase dite de type I, telle que :

$$F(z) = \begin{bmatrix} F_0(z^4) & F_1(z^4) & \hat{F}_1(z^4) & \hat{F}_0(z^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \end{bmatrix}$$

5      3.      Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 et 2, caractérisé en ce que, dans ledit filtre d'émission (12), on effectue une étape de filtrage suivie d'une étape d'interpolation par un facteur  $M=4$ .

10      4.      Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 3, caractérisé en ce que, dans ledit filtre de réception (15), on effectue une étape de décimation par un facteur  $M=4$  suivie d'une étape de filtrage.

5.      Procédé selon l'une quelconque des revendications 1 à 4, caractérisé en ce que ledit filtre d'émission (12) et/ou ledit filtre de réception (15) présente une structure de réalisation sous forme d'au moins un treillis.

15      6.      Procédé selon la revendication 5, caractérisé en ce que ledit filtre d'émission (12) et ledit filtre de réception (15) sont constitué chacun d'une paire de composantes polyphases donnée respectivement par les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix} = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{F}_1 \\ \hat{F}_0 \end{bmatrix} = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec :  $A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$       et       $\Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

## ANNEXE 1

La répartition du filtrage de Nyquist sur 2 filtres, de ce fait couramment appelés filtres en racine de Nyquist, ou en raccourci demi-Nyquist, doit tenir compte de contraintes liées à l'IES, aux spécifications fréquentielles, à la linéarité de la phase et à la propriété dite de paire adaptée. Dans ce paragraphe nous précisons ces différentes notions en supposant, pour simplifier la notation, que  $T = 1$ . Par ailleurs, dans le cadre de la réalisation proposée, nous ne traitons que du cas des filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF).

## 1- Interférence Entre Symboles (IES)

Soit  $x(n)$  le signal d'entrée et  $X(z)$  sa transformée en  $z$ , i.e.  $X(z) = \sum_n x(n)z^{-n}$ , et convenons de noter suivant le même principe l'ensemble des signaux du système de transmission. La contrainte d'IES nulle revient à imposer que, en l'absence de bruit, le signal de sortie, noté  $S(z)$ , soit identique, à un retard près, à  $X(z)$ .

Soit  $Y(z)$  le signal en sortie de l'émetteur, il peut s'écrire

$$Y(z) = F_T(z)X(z^M). \quad (1)$$

En sortie du filtre de réception le signal, noté  $U(z)$ , a pour expression

$$U(z) = F_T(z)F_R(z)X(z^M). \quad (2)$$

Le signal de sortie est donc tout simplement

$$S(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} U(z^{\frac{1}{M}} w^k) = \left[ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_T(z^{\frac{1}{M}} w^k) F_R(z^{\frac{1}{M}} w^k) \right] X(z), \quad (3)$$

où  $w = e^{\frac{2j\pi}{M}}$  est une racine  $M$ ème de l'unité. La condition d'IES nulle peut alors se résumer à l'équation

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_T(z^{\frac{1}{M}} w^k) F_R(z^{\frac{1}{M}} w^k) = z^{-d}, \quad (4)$$

où  $d$  correspond au retard introduit par les 2 filtres.

Soit  $P(z)$  le filtre produit, i.e  $P(z) = F_T(z)F_R(z)$ . Dans un formalisme habituel en traitement multicadence du signal, l'équation (4) peut alors se réécrire

$$P(z) \downarrow_M = z^{-d}. \quad (5)$$

Un filtre  $P(z)$  qui vérifie cette relation est un filtre de Nyquist, ou encore un filtre Mième de bande.

5 Soient  $n_T$  et  $n_R$  les ordres respectifs des filtres RIF d'émission et de réception, le filtre  $P$  est donc d'ordre  $n_P = n_T + n_R$  et il peut se mettre sous la forme

$$P(z) = \sum_{n=0}^{n_P} p(n)z^{-n}. \quad (6)$$

10 Si l'équation (5) n'est pas vérifiée, on mesure habituellement la "distance" par rapport à cette propriété par l'une ou l'autre des expressions qui suivent

$$D_1 = \frac{1}{|p(d)|} \sum_{kM \neq d} |p(d - kM)|, \quad (7)$$

ou

$$15 \quad D_2 = \frac{1}{p^2(d)} \sum_{kM \neq d} p^2(d - kM). \quad (8)$$

## 2- Les spécifications fréquentielles

La figure 2 représente une spécification fréquentielle typique pour les filtres en transmission numérique :

- 20
- Le facteur de retombée, en anglais le "roll-off", définit pour ces filtres passe-bas, la bande passante par  $[0, \omega_p = \frac{\pi}{M}(1 - \rho)]$  et la bande atténuée par  $[\omega_s = \frac{\pi}{M}(1 + \rho), \pi]$ .
  - Les spécifications d'ondulation en bande passante, notée  $\delta_1$ , et en bande atténuée, notée  $\delta_2$ , sont en général les mêmes pour les filtres d'émission et de réception.
  - 25 • À la pulsation  $\pi/M$ , on impose en général la contrainte  $F_R(\pi/M) = F_T(\pi/M) = \sqrt{2}/2$ .

## 3- La linéarité de phase

30 Le choix de filtres à caractéristique phase-fréquence parfaitement linéaire est en général recommandé pour les systèmes de transmission numérique [1, p 325]. Cela a en particulier l'avantage de préserver les instants de passage par zéros des trains binaires transmis.

#### 4- La paire de filtres adaptée

Dans le cas de modulations linéaires, si on suppose que l'IES est nulle pour l'ensemble du système de transmission, et que le bruit du canal est additif, blanc et gaussien (BBAG), on sait que la paire adaptée, i.e.  $F_T(z) = z^{-N} F_R(z^{-1})$ , avec  $N = n_T = n_R$  l'ordre de chaque filtre, est optimale pour le critère signal à bruit (SNR) [2, pp. 51 sq.]. Le SNR qui vaut  $\frac{E}{N_0} \frac{1}{\|F_R\|^2 \|F_T\|^2}$  [3] atteint alors son maximum avec  $\|F_R\|^2 \|F_T\|^2 = 1$ .

10

15

20

25

30

## ANNEXE 2

## 1- Bancs de filtres orthogonaux à 2 sous-bandes

Un banc de filtres à 2 sous-bandes peut se représenter suivant le schéma de la figure 3. De manière à satisfaire la condition de non repliement les filtres de synthèse  $G_0(z)$  et  $G_1(z)$  se déduisent directement des filtres d'analyse par

$$G_0(z) = H_1(-z) \text{ et } G_1(z) = -H_0(-z).$$

On peut montrer ensuite [4] que la condition de reconstruction parfaite (PR) peut s'exprimer à partir de la seule matrice polyphase  $H_{[H_0, H_1]}(z)$  du banc d'analyse

$$H_{[H_0, H_1]}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) \\ H_{1,0}(z) & H_{1,1}(z) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

où les  $H_{k,l}(z)$  sont les composantes polyphases pour chaque filtre  $H_k(z)$ , i.e.

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^1 z^{-l} H_{k,l}(z^2) \quad (10)$$

Dans le cas des bancs orthogonaux à 2 sous-bandes les filtres sont d'ordre impair  $2n + 1$  et les composantes polyphases sont toutes de même degré  $n$ . Le banc est alors PR si le déterminant de la matrice polyphase est un monôme, autrement dit si

$$\text{Det } H_{[H_0, H_1]}(z) = H_{0,0}(z)H_{1,1}(z) - H_{1,0}(z)H_{0,1}(z) = \beta z^{-n}, \quad (11)$$

avec  $\beta$  une constante non nulle.

Soit  $\hat{Q}(z)$  le filtre miroir du filtre  $Q(z)$  d'ordre  $m$ , i.e.  $\hat{Q}(z) = z^{-m}Q(z^{-1})$ . Le banc orthogonal se caractérise par des filtres  $H_0(z)$  et  $H_1(z)$  dits conjugués en quadrature, ce qui peut s'écrire  $H_1(z) = \pm z^{-(2n+1)}H_0(z^{-1})$ . Dans ce qui suit, contrairement à la présentation faite en [4], nous choisissons l'écriture avec un signe plus. Dans ces conditions les composantes polyphases satisfont la relation

$$H_{0,1}(z) = -\hat{H}_{1,0}(z), \quad H_{1,1}(z) = \hat{H}_{0,0}(z). \quad (12)$$

Par conséquent la matrice polyphase peut s'exprimer par

$$H_{[H_0, H_1]}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & -\hat{H}_{1,0}(z) \\ H_{1,0}(z) & \hat{H}_{0,0}(z) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

5

et la relation (11) peut se réécrire sous la forme

$$\text{Det } H_{[H_0, H_1]}(z) = H_{0,0}(z)\hat{H}_{0,0}(z) + H_{1,0}(z)\hat{H}_{1,0}(z) = \beta z^{-n}, \quad (14)$$

10

Le signal de sortie est alors tel que  $\hat{X}(z) = \gamma z^{-(2n+1)}X(z)$ , avec  $\gamma$  une constante non nulle. La matrice  $H_{[H_0, H_1]}(z)$  est paraunitaire et peut se mettre sous forme cascade avec [4]

$$H_{[H_0, H_1]}(z) = gA(\alpha_n)\Lambda(z)A(\alpha_{n-1})\dots\Lambda(z)A(\alpha_0), \quad (15)$$

15

où  $g$  est une constante de normalisation non nulle,  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  sont  $n+1$  nombres réels et où les matrices  $A(\alpha)$  pour  $\alpha$  réel et  $\Lambda(z)$  sont définies par

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

20

Une réalisation d'un banc de synthèse basé sur cette écriture mathématique produit la représentation treillis de la figure 4.

2- Caractéristiques générales du cas de la paire adaptée à phase linéaire pour  $M = 4$

25

Pour la paire adaptée à phase linéaire nous avons forcément  $F_T(z)$  et  $F_R(z)$  symétriques tels que  $F_T(z) = F_R(z)$ , que l'on peut noter avec la seule expression  $F(z)$ . Soit  $N$  l'ordre de  $F(z)$ , nous avons donc

$$F(z) = \sum_{k=0}^N f_k z^{-k} \quad (17)$$

Le filtre produit  $P(z)$  s'exprime alors par

30

$$P(z) = F^2(z) = \sum_{k=0}^{2N} p(k) z^{-k} \quad (18)$$

avec, bien sûr,  $p(k) = p(2N - k)$ .  $P(z)$  satisfait la condition d'IES nulle (5) si



$$p(k) = 0 \text{ pour } k - N = 4l, \quad l \neq 0, \quad (19)$$

On peut faire un premier constat en ce qui concerne les filtres d'ordre  $N = 4n$ .

**Proposition 1 .-** Soit  $F(z)$  un filtre symétrique d'ordre  $4n$ .  $F(z)$  ne peut être à IES nulle.

Pour que  $F(z)$ , filtre symétrique, soit à IES nulle il faut que  $f_0 \neq 0$ . Le monôme de plus haut degré de  $P(z)$  est  $f_0^2 z^{-8n}$  alors que son terme central est de degré  $4n$  en  $z^{-1}$ . Comme la différence des degrés est un multiple de 4,  $F(z)$  n'est pas à IES nulle.

La décomposition polyphase de  $F(z)$  pour  $M = 4$  s'écrit sous la forme

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1} F_1(z^4) + z^{-2} F_2(z^4) + z^{-3} F_3(z^4). \quad (20)$$

avec

$$F_l(z) = \sum_{n=0}^{n_l} f_{4n+l} z^{-n} \quad (21)$$

Pour réaliser l'analyse des différents cas possibles en fonction de l'ordre  $N$ , on utilise la propriété de symétrie de  $F(z)$  et le fait que  $4n_l + l \leq N$ .

- Si  $N = 4n$ , le degré de  $F_0(z)$  est égal à  $n$  et celui des  $F_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$  est strictement inférieur à  $n$ . D'après la proposition 1 on sait que ce cas ne présente pas d'intérêt pour notre problème.

- Si  $N = 4n + 1$ ,  $F_1(z)$  est de degré  $n$ ,  $F_0(z)$  de degré  $\leq n$  tandis que  $F_2(z)$  et  $F_3(z)$  sont de degré  $\leq n - 1$ .  $F_1(z)$  correspond alors par symétrie miroir à  $F_0(z)$ .  $F_1(z)$  est donc en fait de degré  $n$ . On a donc

$$F_0(z) = \hat{F}_1(z) \text{ et } F_3(z) = \hat{F}_2(z) \quad (22)$$

- Si  $N = 4n + 2$ , il vient  $n_2 = n, n_1 = n$  et  $n_3 = n - 1$ .  $F_2(z)$  est le symétrique de  $F_0(z)$ , on a donc

5

$$F_2(z) = \hat{F}_0(z) , \quad F_1(z) = \hat{F}_1(z) , \quad F_3(z) = \hat{F}_3(z) \quad (23)$$

10

- Si  $N = 4n + 3$ ,  $4n_l + l \leq 4n + 3, \forall l$  ( $0 \leq l \leq 3$ ), et les filtres  $F_i$  sont tous de degré  $\leq n$ . En effet, le terme de plus haut degré de  $F_0(z)$  est de degré  $4n + 3$  donnant un terme de degré  $n$  à  $F_3(z)$ . Le terme de plus haut degré de  $F_3(z)$  correspond par symétrie au terme constant de  $F_0(z)$ . On a donc

$$F_3(z) = \hat{F}_0(z) \text{ et } F_2(z) = \hat{F}_1(z) \quad (24)$$

15

Remarque.- Dans l'équation (22) on a écrit à dessein  $F_0(z) = \hat{F}_1(z)$  et non  $F_1(z) = \hat{F}_0(z)$  car on est sûr que le degré de  $F_1(z)$  est  $n$  puisque le terme constant de  $F_0(z)$  est non nul, mais pas que le degré de  $F_0(z)$  est  $n$ . D'ailleurs ce cas, où  $f_1 = f_{N-1} = 0$ , est considéré plus bas.

20

On développe alors le produit  $F^2(z)$  en tenant compte de la décomposition (20) et l'on obtient la caractérisation suivante des filtres  $F(z)$  vérifiant la propriété d'IES nulle.

**Théorème 1.-** Soit  $F(z)$  un filtre symétrique d'ordre  $N$  vérifiant  $F(z = 0) \neq 0$ . Alors suivant les valeurs de  $N$ ,  $F(z)$  est à IES nulle si et seulement si :

25

- Si  $N = 4n + 1$ ,

$$F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \gamma z^{-n} , \quad (25)$$

30

- Si  $N = 4n + 2$ ,

$$2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \gamma z^{-n} , \quad (26)$$

• Si  $N = 4n + 3$ ,

$$F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \gamma z^{-n}, \quad (27)$$

où  $\gamma$  est une constante non nulle.

5

Le théorème suivant montre que toutes les solutions d'ordre  $N = 4(n-1)+3$  s'obtiennent à partir des solutions d'ordre  $N = 4n + 1$ .

10

**Théorème 2.**— Soit  $F(z)$  un filtre symétrique à IES nulle d'ordre  $4n + 1$ ,  $n \geq 1$ , alors si  $F_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  désigne ses composantes polyphases,  $F_0(z)$  est de degré strictement inférieur à  $n$  et  $F_1(z)$  peut s'écrire sous la forme  $F_1(z) = z^{-1}K_1(z)$ . On a alors  $\hat{K}_1(z) = F_0(z)$  et le filtre  $\bar{F}(z)$  de composantes polyphases  $[F_0(z), F_2(z), F_3(z), K_1(z)]$  est symétrique d'ordre  $4(n-1) + 3$  et à IES nulle.

15

**Démonstration.**— Cela résulte immédiatement de la relation (25) puisque le terme constant du membre de gauche est nul. On a donc  $F_1(z=0)\hat{F}_1(z=0) = f_0f_1 = 0$ . Comme  $F_1(z)$  contribue avec  $f_0$  au terme de plus haut degré,  $f_0 \neq 0$  et donc  $f_1 = 0$ . En écrivant  $F_1(z)$  sous la forme  $F_1(z) = z^{-1}K_1(z)$  et sachant que  $\hat{F}_1(z) = \hat{K}_1(z)$ , la relation (26), peut encore s'écrire

20

$$z^{-1}K_1(z)\hat{K}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \gamma z^{-n}, \quad (28)$$

Comme  $\hat{K}_1(z) = F_0(z)$  et donc  $K_1(z) = \hat{F}_0(z)$  on obtient la relation (27), pour un filtre où  $K_1(z)$  se substitue à  $F_3(z)$  et a donc pour composantes polyphases :  $[F_0(z), F_2(z), F_3(z), K_1(z)]$ . On peut vérifier sur un exemple le passage d'un filtre d'ordre 9 à un filtre d'ordre 7.

25

*Exemple*

$$\begin{aligned} F_0(z) &= f_0 + f_4z^{-1} + f_1z^{-2} = f_0 + f_4z^{-1} \\ F_1(z) &= f_1 + f_4z^{-1} + f_0z^{-2} = z^{-1}(f_4 + f_0z^{-1}) = z^{-1}K_1(z) \\ F_2(z) &= f_2 + f_3z^{-1} \\ F_3(z) &= f_3 + f_2z^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

30

Le filtre composé de  $[F_0(z), F_2(z), F_3(z), K_1(z)]$  est d'ordre 7 et s'exprime alors par

$$f_0 + f_2z^{-1} + f_3z^{-2} + f_4z^{-3} + f_4z^{-4} + f_3z^{-5} + f_2z^{-6} + f_0z^{-7} \quad (30)$$

Un troisième théorème montre que les solutions d'ordre  $N = 4n+3$  s'obtiennent à partir des bancs de filtres orthogonaux à 2 sous-bandes.

5      **Théorème 3.**— Soit  $[H_0(z), H_1(z)]$  un banc de filtres orthogonaux à deux sous bandes et d'ordre  $2n + 1$  dont la matrice polyphase est donnée par (13), alors le filtre  $\tilde{H}(z)$  dont les quatre composantes polyphases sont  $[H_{0,0}(z), H_{1,0}(z), \hat{H}_{1,0}(z), \hat{H}_{0,0}(z)]$  est un filtre à phase linéaire, d'ordre  $4n + 3$  et à IES nulle. De façon réciproque, tous les filtres de ce type s'obtiennent à partir des bancs

10      **Démonstration.**— La démonstration est immédiate puisque les filtres à phase linéaire, d'ordre  $4n + 3$  et à IES nulle sont caractérisés par la relation (27) qui, dans les conditions du théorème devient équivalente à (14).

15

20

25

30

## ANNEXE 3

Paire adaptée à phase linéaire d'ordre  $N = 4n + 2$

## 1- Factorisation initiale

Le théorème 1 en annexe 2 nous donne, entre autres, la condition que doit réaliser un filtre  $F(z)$  d'ordre  $4n + 2$  pour être à IES nulle. On rappelle qu'elle s'écrit

$$2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \gamma z^{-n}, \quad (31)$$

où  $\gamma$  est une constante non nulle et où les composantes  $F_i(z)$  sont toutes de degré  $n$ , hormis  $F_3(z)$ , et satisfont les relations  $\hat{F}_2(z) = F_0(z)$ ,  $F_1(z) = \hat{F}_1(z)$  et  $F_3(z) = \hat{F}_3(z)$ .

**Théorème 4.**— Soient  $a_i, i = 1, \dots, n + 1, n \geq 0, n + 1$  constantes. On considère le vecteur colonne  $[F_0(z), F_1(z), F_2(z), F_3(z)]^T$  défini par l'égalité

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = M(a_1) Z M(a_2) Z \dots Z M(a_n) Z \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

Alors le filtre  $F(z)$ , dont les composantes polyphases sont les  $F_i(z), i = 1, \dots, 4$ , est à phase linéaire, monique, d'ordre  $4n + 2$  et à IES nulle.

Réciproquement, tout filtre monique d'ordre  $4n + 2$ , à phase linéaire et à IES nulle admet une décomposition de cette forme.

**Démonstration.**— Pour  $n = 0$ , les composantes polyphases sont les polynômes constants  $F_0(z) = 1, F_1(z) = a_1, F_2(z) = 1$  et  $F_3(z) = 0$ . Ces polynômes vérifient trivialement la condition (31) ainsi que les conditions de symétrie et de degré. On a alors  $F(z) = 1 + a_1 z^{-1} + z^{-2}$ . Supposons maintenant que les composantes d'un filtre  $F(z)$  d'ordre  $4n + 2$ ,  $F_i(z), i = 0, \dots, 3$ , vérifient la condition (31) ainsi que les conditions de symétrie et de degré. Construisons  $L_i(z), i = 0, \dots, 3$  par

$$\begin{bmatrix} L_0(z) \\ L_1(z) \\ L_2(z) \\ L_3(z) \end{bmatrix} = M(a_1) Z \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

On a

$$L_0(z) = F_0(z) - \frac{a_1^2}{2} z^{-1} F_2(z) + a_1 z^{-1} F_3(z), \quad (34)$$

$$L_1(z) = -a_1 F_0(z) - a_1 z^{-1} F_2(z) + \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right) z^{-1} F_3(z), \quad (35)$$

$$L_2(z) = -\frac{a_1^2}{2} F_0(z) + z^{-1} F_2(z) + a_1 z^{-1} F_3(z), \quad (36)$$

$$L_3(z) = \left(1 + \frac{a_1^2}{2}\right) F_1(z). \quad (37)$$

Il est à peu près immédiat de vérifier les conditions de degré et de symétrie sur les composantes  $L_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . En développant l'expression analogue de (31) pour les composantes  $L_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , on obtient

$$2L_0(z)\hat{L}_0(z) + L_1^2(z) + z^{-1}L_3^2(z) = \frac{(2+a_1^2)^2}{4} z^{-1} (2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z)) \quad (38)$$

D'après (31), la partie directe du théorème est donc démontrée.

La réciproque est démontrée si l'on peut établir que les relations (34-37) permettent de déterminer de manière unique un coefficient  $a_1$  et les composantes  $F_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, 3$  d'un filtre  $F(z)$  monique, à phase linéaire et à IES nulle. Comme on doit avoir  $F_0(z=0) = 1$  (puisque  $F(z)$  est monique et symétrique, son terme constant est égal à 1), d'après (35) on a  $a_1 = -L_1(z=0)$ . Si  $a_1 = 0$ , alors nous sommes dans le cas particulier où  $L_0(z)$  est de degré  $n$ , le terme de degré  $n+1$  étant nul, le polynôme symétrique  $L_1(z)$  a un terme constant nul et son terme de plus haut degré est nul, et enfin le terme constant de  $L_2(z)$  est nul (mais pas son terme de degré  $n+1$  dont le coefficient est 1). On inverse alors les relations (34-37) par  $F_0(z) = L_0(z)$ ,  $F_1(z) = L_3(z)$ ,  $F_2(z) = L_2(z)$  quo  $z^{-1}$  et  $F_3(z) = L_1(z)$  quo  $z^{-1}$ . On suppose donc maintenant que  $a_1 \neq 0$ , mais ce n'est pas nécessaire en fait. L'inversion formelle des formules (34-37) conduit à

$$F_0(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2} \left( L_0(z) - a_1 L_1(z) - \frac{a_1^2}{2} L_2(z) \right), \quad (39)$$

$$F_1(z) = \frac{2}{2+a_1^2} L_3(z), \quad (40)$$

$$F_2(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2} \left( -\frac{a_1^2}{2} L_0(z) - a_1 L_1(z) + L_2(z) \right) \text{ quo } z^{-1}, \quad (41)$$

$$F_3(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2} \left( a_1 L_0(z) + \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right) L_1(z) + a_1 L_2(z) \right) \text{ quo } z^{-1} \quad (42)$$

Il suffit alors de montrer que les quotients par  $z^{-1}$  sont exacts. Comme  $F(z)$  est monique,  $L_0(z=0) = 1$ ,  $L_1(z=0) = -a_1$  par définition de  $a_1$  et, d'après la relation (31),  $L_2(z=0) = -a_1^2/2$ . Les membres de droites des égalités définissant  $F_2(z)$  et  $F_3(z)$  s'annulent donc en  $z=0$  et les quotients sont exacts. On peut alors vérifier que les polynômes  $F_i, i=0, \dots, 3$  satisfont les conditions de symétrie adéquates.

## 2- Décomposition équivalente

En notant par  $R(\alpha)$  la matrice

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

et en utilisant la formule (32), on obtient

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = P^T R(a_1) P Z P^T R(a_2) P Z P^T \dots P Z P^T R(a_n) P Z \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On introduit alors la matrice  $\bar{Z}$  définie par

$$\bar{Z} = P Z P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+z^{-1}) & 0 & \frac{1}{2}(-1+z^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ \frac{1}{2}(-1+z^{-1}) & 0 & \frac{1}{2}(1+z^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

et compte tenu de

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

on obtient, avec un facteur multiplicatif  $g$ , la décomposition

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = g P^T R(a_1) \bar{Z} R(a_2) \bar{Z} \dots R(a_n) \bar{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

## Complexité opératoire

L'équation (46) donne directement la structure de réalisation des filtres demi-Nyquist d'émission et de réception. Elle correspond à un système à 4 entrées et 4 sorties qui dans les schémas des figures 6 et 7 se substitue à l'ensemble

des 4 filtres polyphases. On notera que dans le cas du filtre d'émission les sorties sont à inverser par rapport à l'écriture (46) qui correspond, par contre, exactement, à celle du filtre de réception. Hormis cette différence de détail, les structures pour chacun de ces filtres d'ordre  $4n + 2$  vont donc correspondre à

5

- $n$  blocs matriciels de type  $\bar{Z}$  et  $R(\alpha_l)$ .

- un bloc matriciel  $P^T$ .

- un bloc vectoriel  $[1, a_{n+1}, 0, 0]^T$ .

10

- un multiplieur  $g$ , à ne comptabiliser que pour l'émission ou la réception.

Examinons à présent plus en détail le coût de réalisation de chacun de ces éléments.

- Matrices  $R(\alpha_l)$ .

15

Les matrices  $R(\alpha_l)$ ,  $1 \leq l \leq n$ , sont des matrices blocs qui peuvent se mettre sous la forme

$$R(\alpha_l) = \begin{pmatrix} G_l & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (47)$$

20

où  $I$  est la matrice unité et  $G_l$  la matrice de rotation pour l'angle  $\alpha_l$ , i.e.

$$G_l = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_l) & -\sin(\alpha_l) \\ \sin(\alpha_l) & \cos(\alpha_l) \end{pmatrix} \quad (48)$$

25

Le coût d'implantation est donc tout simplement celui du treillis correspondant à la rotation  $G_l$ , c'est-à-dire 4 multiplications et 2 additions.

- La matrice  $\bar{Z}$ .

Elle permet d'associer à un vecteur  $e$  d'entrée, le vecteur  $s$  de sortie par la relation  $s = \bar{Z}e$ , ce qui se traduit par les 4 équations qui suivent :

30

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{2}[(e_0 - e_2) + z^{-1}(e_0 + e_2)] \\ s_1 &= z^{-1}e_1 \\ s_2 &= \frac{1}{2}[(e_2 - e_0) + z^{-1}(e_0 + e_2)] \\ s_3 &= e_3 \end{aligned} \quad (49)$$



Le schéma de réalisation d'un bloc de ce type est représenté à la figure 14. On peut préciser que les multiplications par  $1/2$  peuvent se réduire à un simple décalage des données binaires. En plus de ces 2 décalages le coût est donc simplement de 4 additions et d'une inversion de signe.

5

- La matrice  $P^T$ .

Elle se présente sous la forme :

$$P^T = \begin{pmatrix} a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

10

avec  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Sa réalisation peut également se déduire des équations d'entrée-sortie, qui dans le cas présent s'écrivent :

$$\begin{aligned} s_0 &= a(\epsilon_0 + \epsilon_2) \\ s_1 &= \epsilon_1 \\ s_2 &= a(-\epsilon_0 + \epsilon_2) \\ s_3 &= \epsilon_3 \end{aligned} \quad (51)$$

15

de manière immédiate on peut donc déduire ensuite le schéma de la figure

15.

Le coût opératoire est de 2 multiplications, 2 additions et une inversion de signe.

20

- Le bloc vectoriel  $[1, a_{n+1}, 0, 0]^T$ .

Son coût d'implantation est d'une seule multiplication.

Le schéma complet d'implantation, conforme à l'équation (46), correspond donc à un système à 4 entrées et 4 sorties, tel qu'on le représente à la figure 16. On retrouve naturellement ce système à l'émission et à la réception. L'ordre de complexité de chacun de ces filtres est donc de  $4n$  MPU et  $6n$  APU.

25

Ainsi que nous l'avons déjà précisé, à l'émission il est nécessaire d'inverser les sorties. Dans le schéma de réalisation reporté à la figure 17, cette opération est symbolisée par le bloc J, correspondant à la matrice antidiagonale, i.e.

30

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Le schéma de réception pour l'ordre  $4n + 2$  est représenté à la figure 18.

5

10

15

20

25

30

# ANNEXE 4

## References

- [1] J. G. Proakis. *"Digital Communications"*. McGraw-Hill, 1983.
- 5 [2] R. W. Lucky, J. Salz, and E. J. Weldon, Jr. *"Principles of Data Communications"*. McGraw-Hill, New-York, 1968.
- [3] P. Siohan and F. Moreau de Saint-Martin. "New designs of linear-phase transmitter and receiver filters for digital transmission systems". *to appear in IEEE Transactions on Circuits and Systems, part II*.
- 10 [4] P. P. Vaidyanathan. *Multirate systems and filter banks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-York, New Jersey, 1993.

15

20

25

30

où  $g$  est une constante non nulle de normalisation et  $\alpha_i$  des coefficients réels.

7. Procédé selon la revendication 6, caractérisé en ce qu'il met en oeuvre une structure à deux treillis.

8. Procédé selon la revendication 6, caractérisé en ce qu'il met en oeuvre une structure à treillis unique, fonctionnant à une fréquence double.

9. Dispositif de filtrage d'un signal numérique de Nyquist à interférences nulles entre symboles, destiné à traiter un signal physique transmis entre un émetteur et un récepteur via un canal de transmission,

basé sur un filtre symétrique  $P(z) = F^2(z)$  d'ordre  $N$  mettant en oeuvre un facteur de suréchantillonnage  $M=4$ , et formant une paire adaptée comprenant un filtre d'émission (12) et un filtre de réception (15),

la décomposition polyphase de  $F(z)$  s'écrivant :

$$F(z) = F_0(z^4) + z^{-1}F_1(z^4) + z^{-2}F_2(z^4) + z^{-3}F_3(z^4)$$

caractérisé en ce que  $N$  est différent de  $4n$ ,  $n$  entier,

et en ce que :

$$\text{Si } N=4n+1, \quad F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \gamma z^{-n}$$

$$\text{Si } N=4n+2, \quad 2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \gamma z^{-n}$$

$$\text{Si } N=4n+3, \quad F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \gamma z^{-n}$$

$\hat{F}$  étant la symétrie miroir de  $F$  et  $\gamma$  étant une constante non nulle.

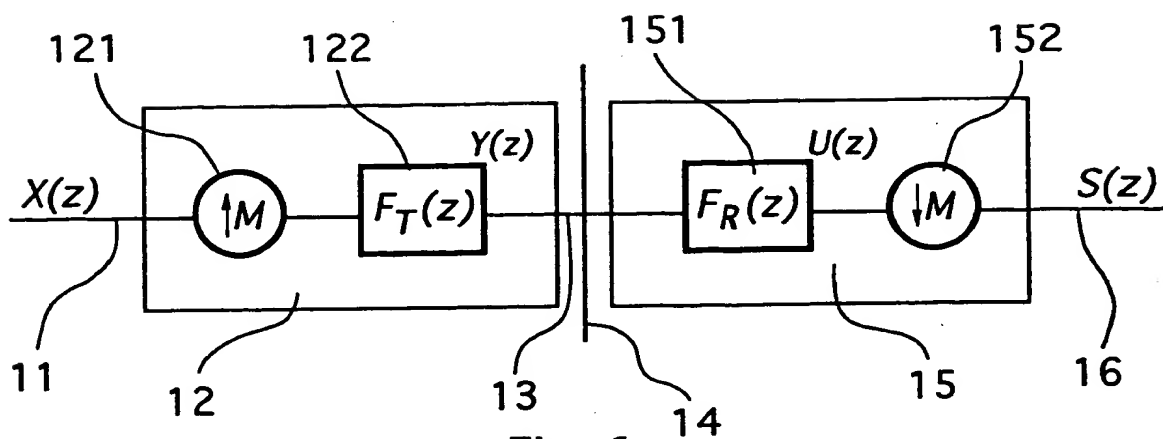


Fig. 1

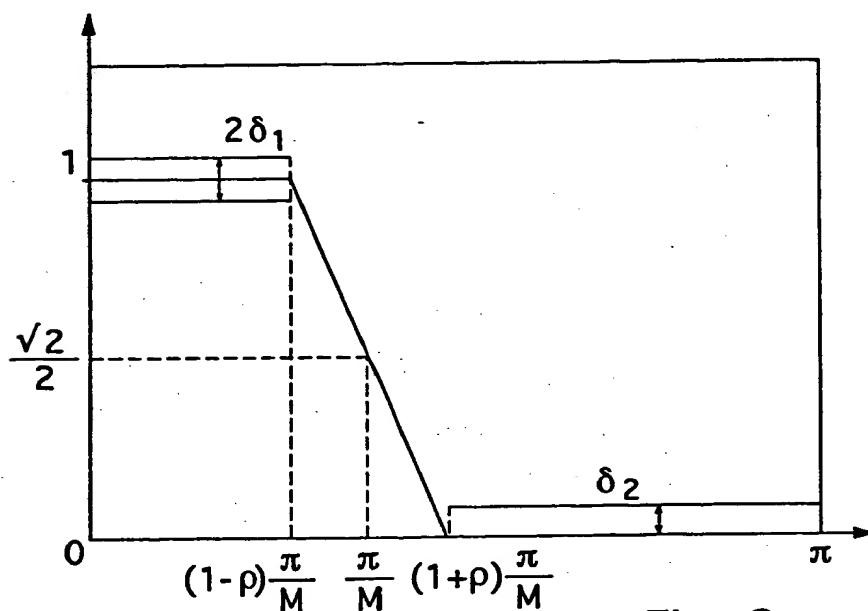


Fig. 2

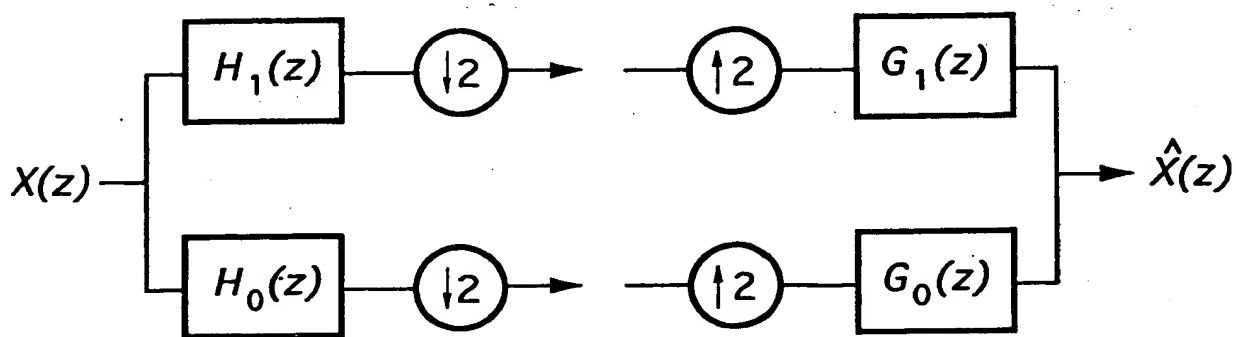


Fig. 3

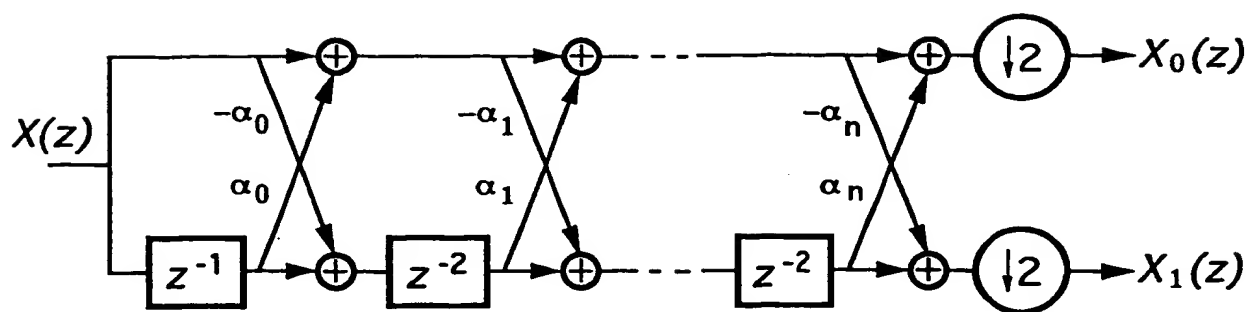


Fig. 4

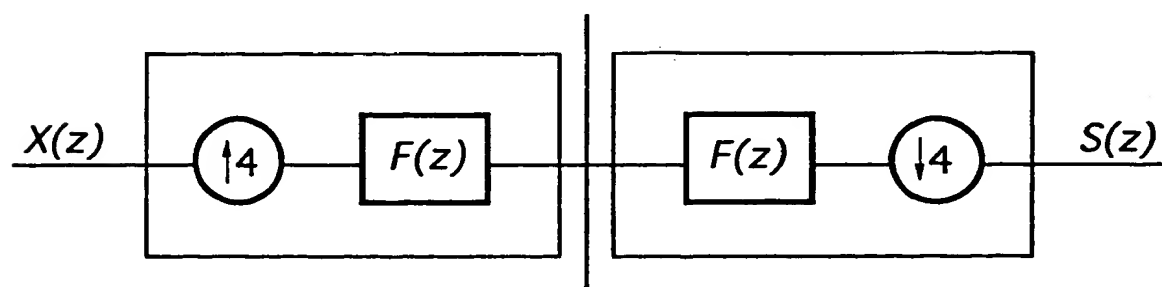


Fig. 5

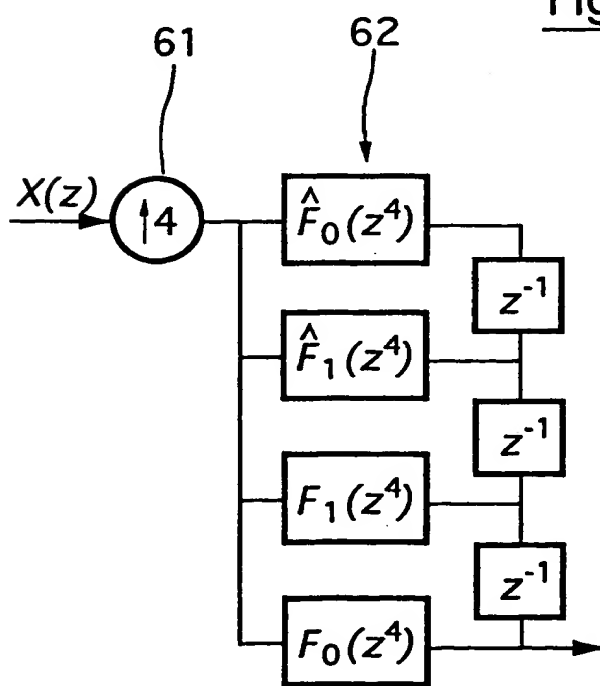


Fig. 6a

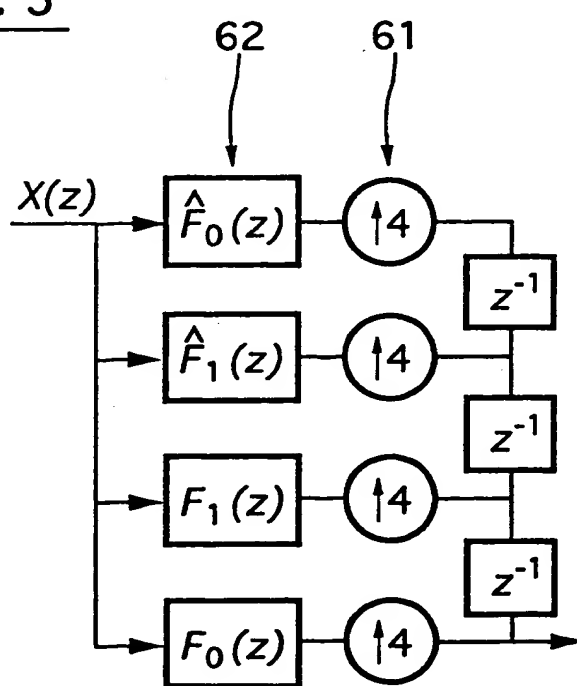


Fig. 6b

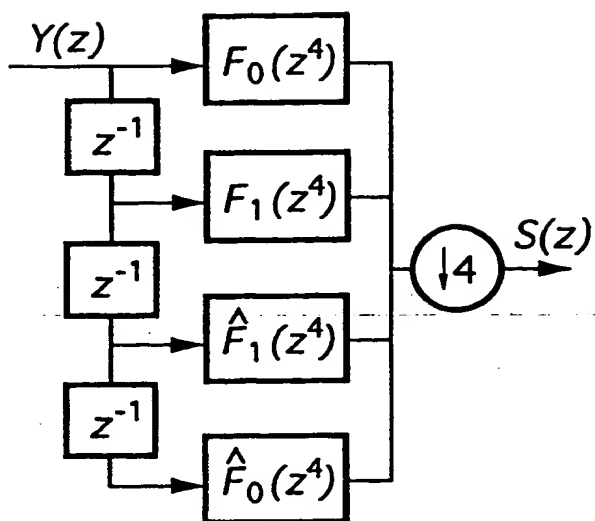


Fig. 7a

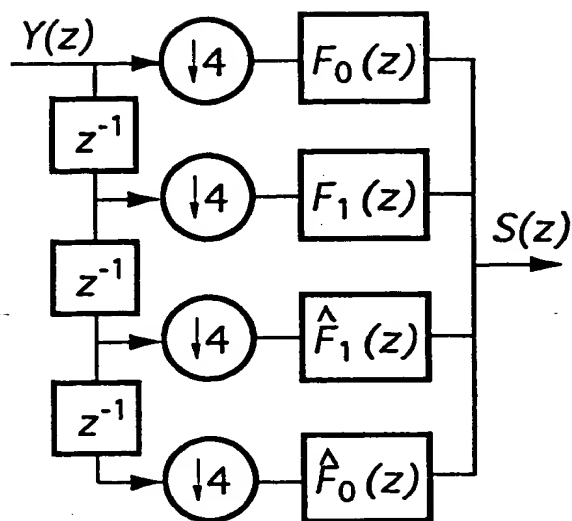


Fig. 7b

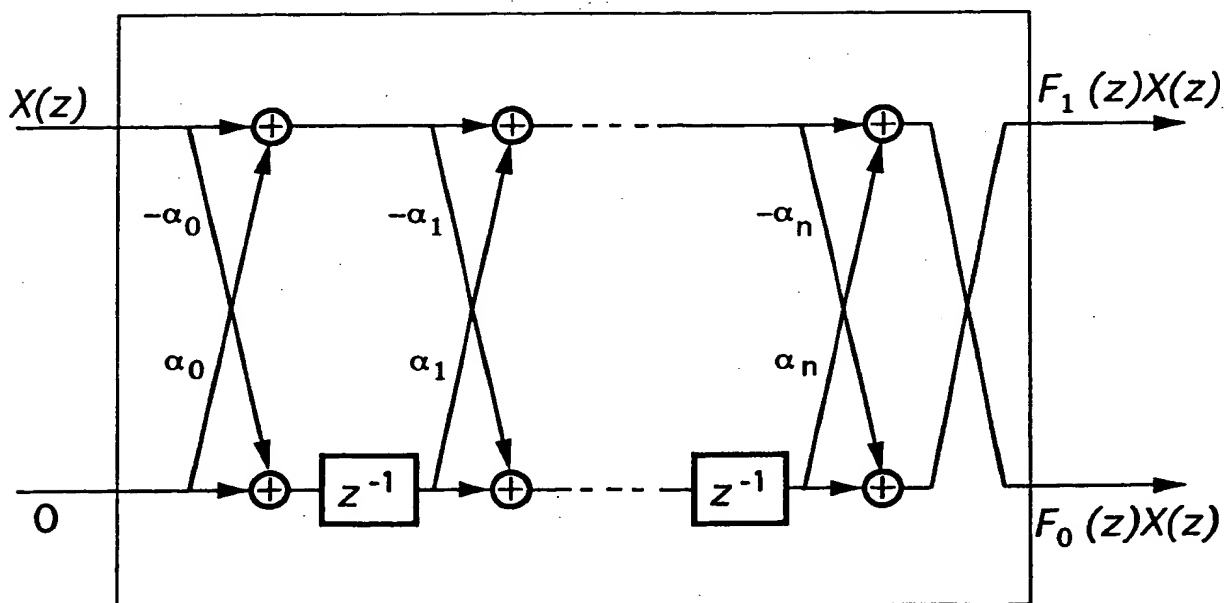


Fig. 8

4/8

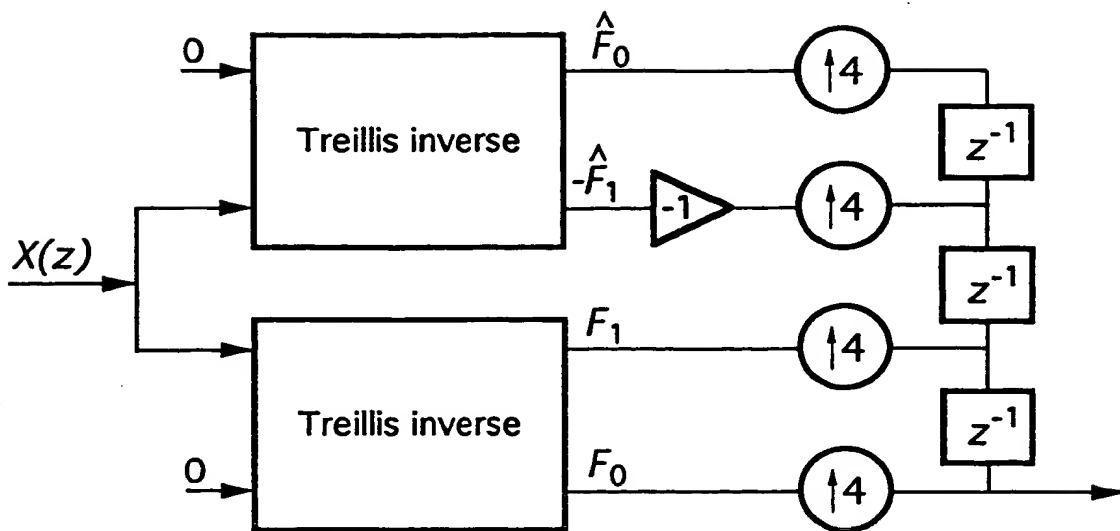


Fig. 9

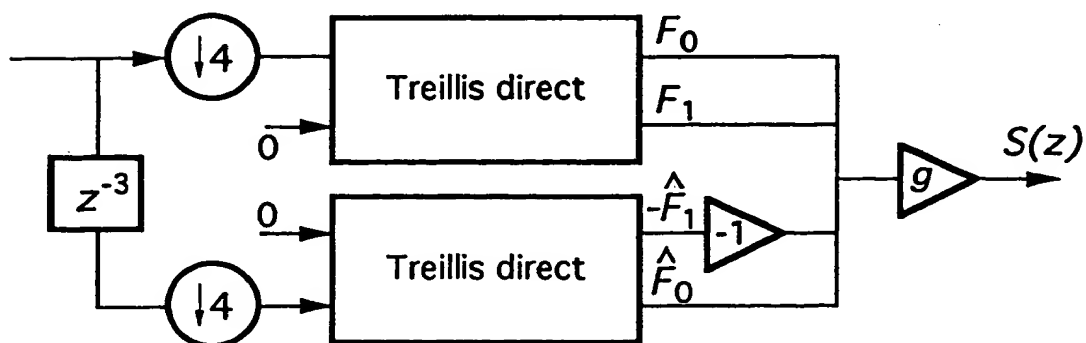


Fig. 10

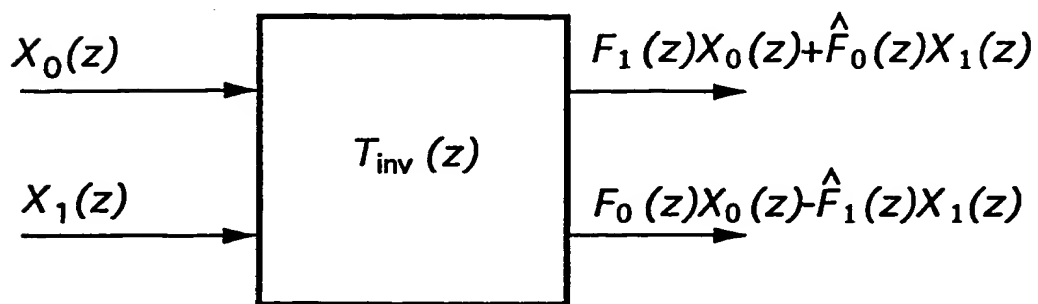


Fig. 11



5/8

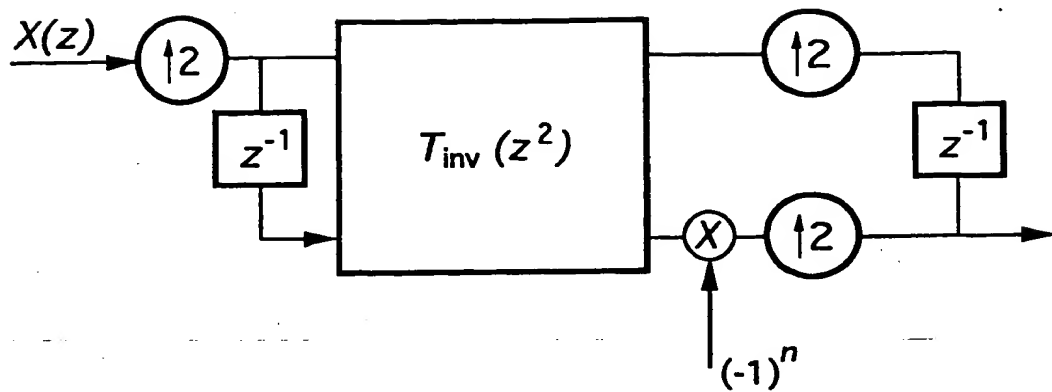


Fig. 12

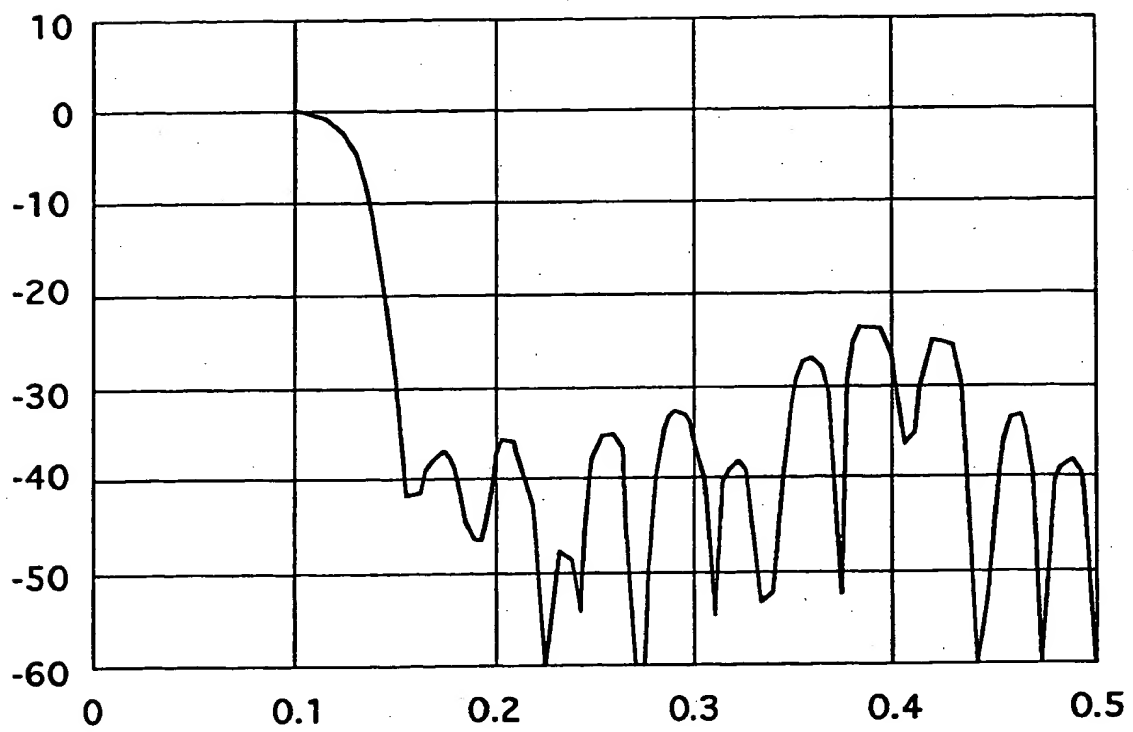


Fig. 13

6/8

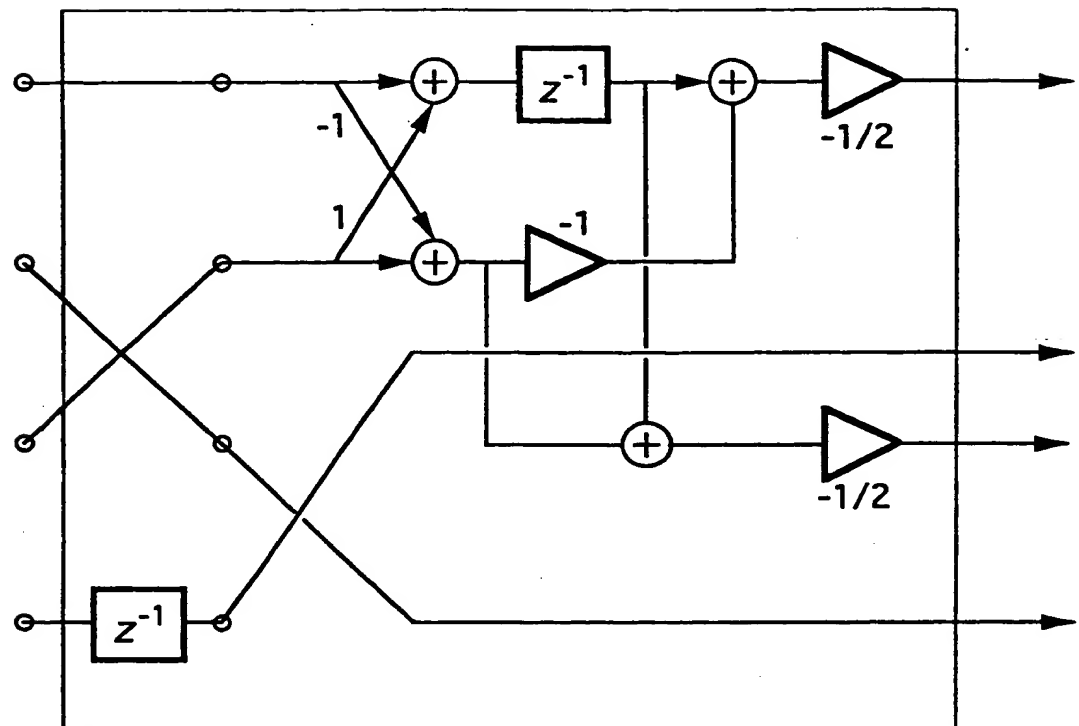


Fig. 14

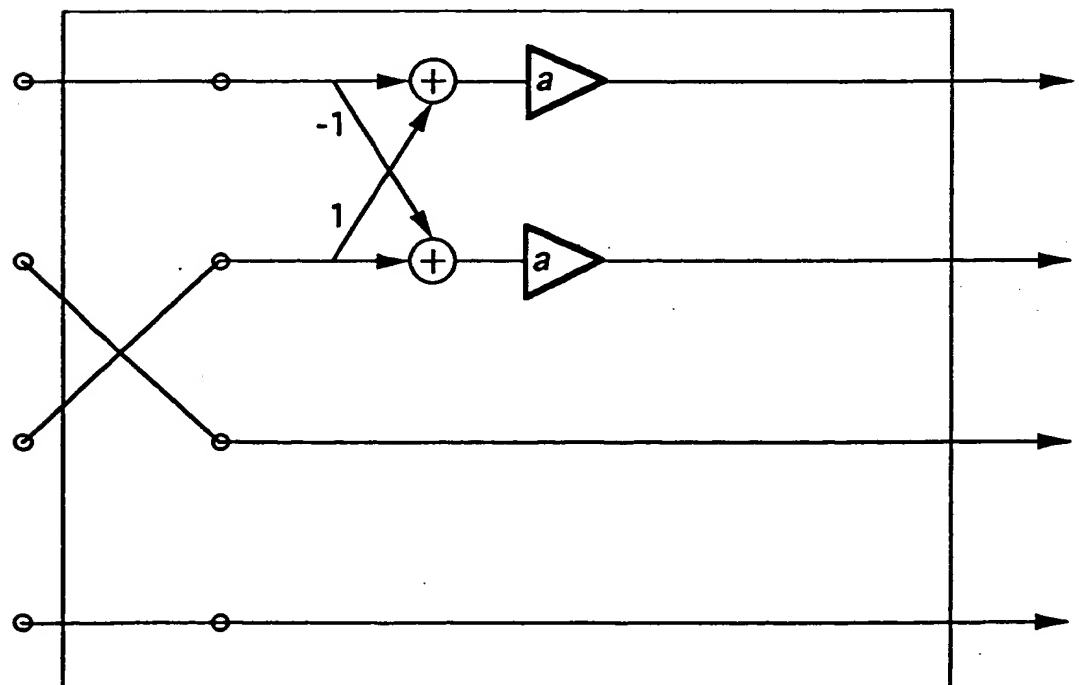


Fig. 15

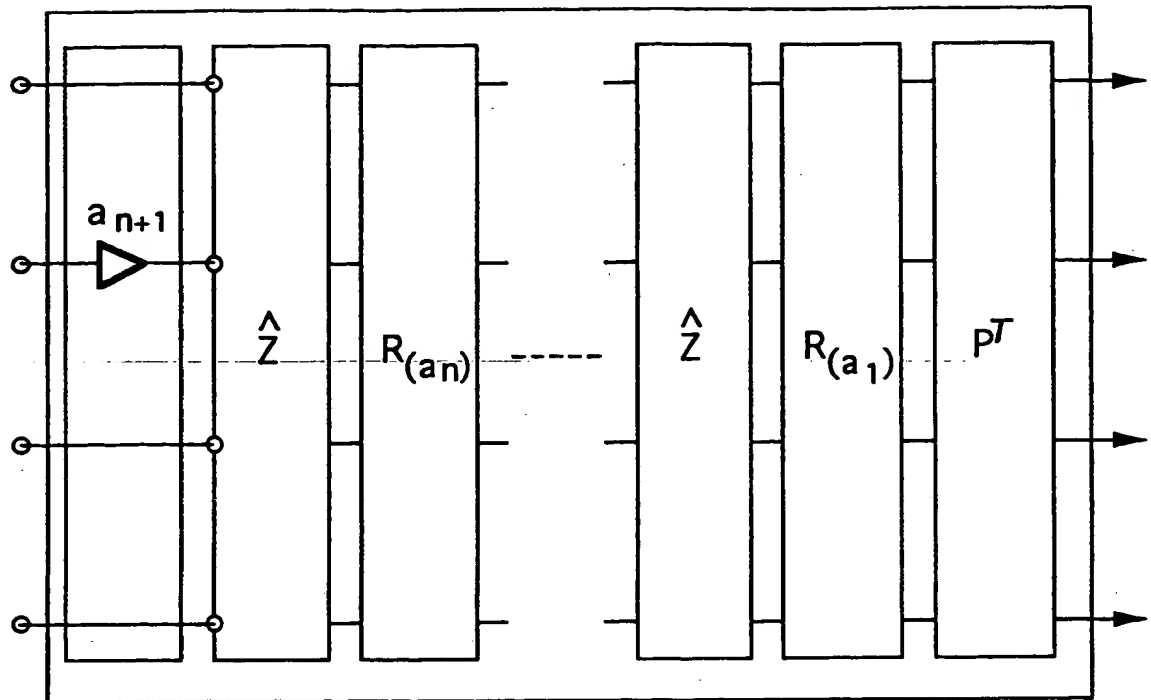


Fig. 16

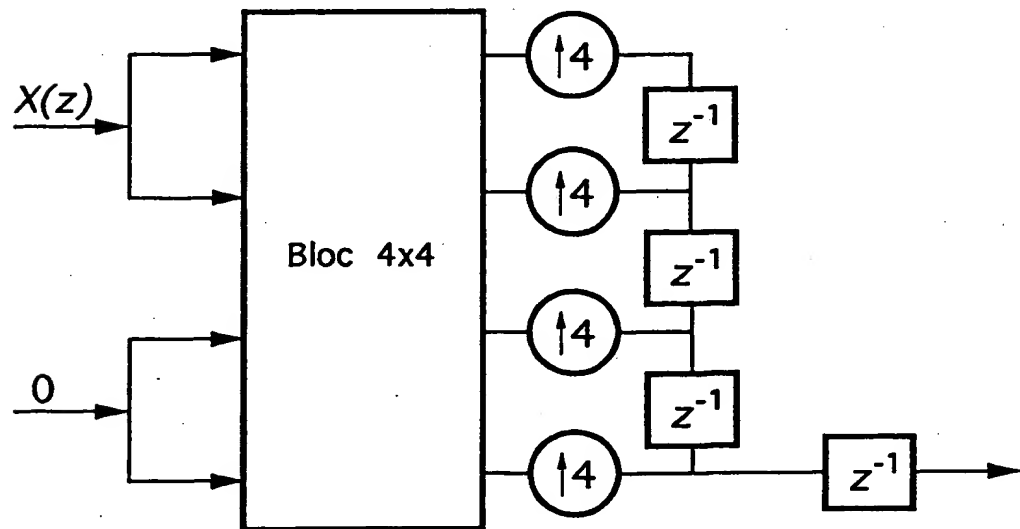
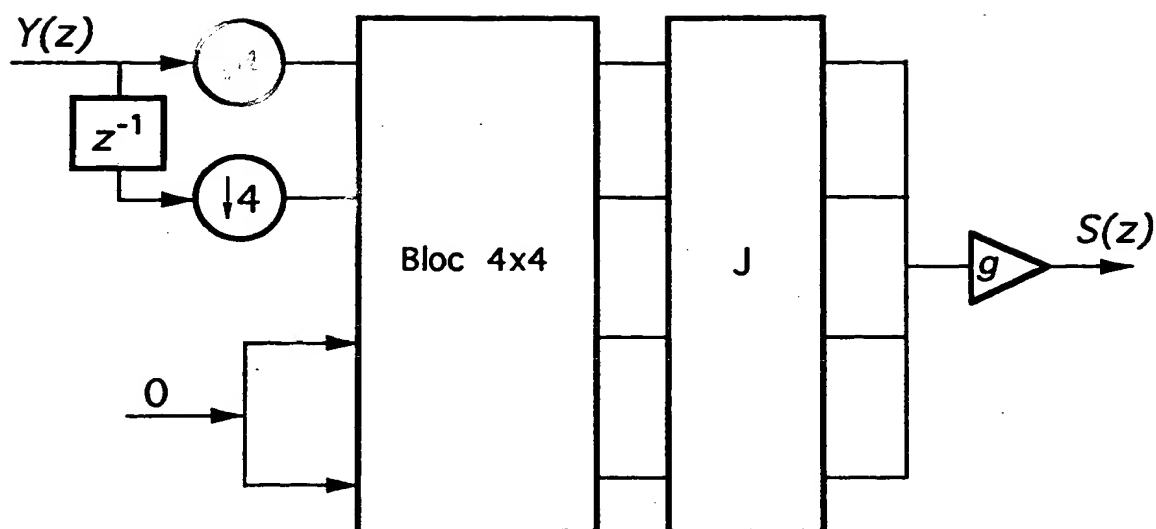


Fig. 17

Fig. 18



This Page Blank (uspto)